

# **Eine modifizierte Surgery-Methode zur Berechnung von Blockdiffeomorphismen**

Dissertation  
zur Erlangung des Grades  
"Doktor der Naturwissenschaften"  
am Fachbereich Mathematik  
der Johannes Gutenberg-Universität  
in Mainz

vorgelegt von  
**Heinz Stralla**  
geboren in Remscheid

Mainz, 1986





Digitized by the Internet Archive  
in 2026

[https://archive.org/details/IA41554222\\_0020](https://archive.org/details/IA41554222_0020)



EINE MODIFIZIERTE SURGERY-METHODE  
ZUR BERECHNUNG VON BLOCKDIFFEOMORPHISMEN

Dissertation  
zur Erlangung des Grades  
"Doktor  
der Naturwissenschaften"  
am Fachbereich Mathematik  
der Johannes Gutenberg-Universität  
in Mainz

vorgelegt von  
Heinz Stralla  
geboren in Remscheid

Mainz, 1985

Tag der mündlichen Prüfung: 11. 3. 1986

Berichterstatter: Prof. Dr. M. Kreck

Prof. B. Williams, Ph.D.

Die Schöpfung ist nicht fertig.  
Auch die Sinngebung ist nicht fertig.  
Was wir in der Sinnzusage der biblischen  
Botschaft erhalten, ist Ausrüstung zum Hoffen  
und zum Durchhalten in der Nacht der Anfechtung  
und der Erfahrung von Sinnlosigkeit  
durch Ausblick auf Erfüllung der Verheißung.  
"Gott" ist der Name der Verheißung  
und die Verheißung der Erfüllung. ...  
Wir haben den Sinn noch nicht so, daß wir  
ihn sehen; aber wir blicken voraus  
auf seine Offenbarung.

Helmut Gollwitzer



## Zusammenfassung:

In dieser Arbeit wird der modifizierte Surgery-Ansatz von M. Kreck verwendet, um exakte Sequenzen zur Berechnung der Homotopiegruppen der Blockdiffeomorphismen einer Mannigfaltigkeit herzuleiten. An Beispielen wird gezeigt, wie sich mit dieser Methode konkrete Berechnungen erzielen lassen.

Außerdem wird die Bordismusgruppe von Faserbündeln über einem Wedge von eindimensionalen Sphären berechnet und durch ein Beispiel gezeigt, daß die Bordismusgruppe von Faserbündeln über höherdimensionalen Sphären nichttrivial sein kann.



## Einleitung

Neben der Klassifikation der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist das Studium der Diffeomorphismen einer Mannigfaltigkeit eines der wesentlichen Probleme der Differentialtopologie. Eine besondere Bedeutung spielt dabei die Bestimmung des Homotopietyps von  $\text{Diff}(M)$ , der Gruppe aller Diffeomorphismen, insbesondere die Bestimmung der Homotopiegruppen  $\pi_i \text{Diff}(M)$ . Der Homotopietyp von  $\text{Diff}(M)$  ist nur in sehr wenigen Fällen vollständig bekannt, nämlich für eindimensionale Mannigfaltigkeiten, für Flächen und für die dreidimensionale Sphäre. In den letzten Jahren sind große Anstrengungen unternommen worden, um im allgemeinen Fall Informationen über den Homotopietyp von  $\text{Diff}(M)$  zu erhalten.

Die Berechnung der Homotopiegruppen  $\pi_i \text{Diff}(M)$  führt auf das Problem, einen mit der Projektion auf  $S^i$  verträglichen Diffeomorphismus  $f: S^i \times M \longrightarrow S^i \times M$  auf  $D^{i+1} \times M$  fortzusetzen, so daß die Fortsetzung ebenfalls mit der Projektion auf die erste Komponente verträglich ist.

Das Fortsetzungsproblem ohne die Verträglichkeitsbedingung führt zum Studium der Blockdiffeomorphismen einer Mannigfaltigkeit. Die Homotopiegruppen der Blockdiffeomorphismen  $\pi_i \widetilde{\text{Diff}}(M)$  sind von verschiedenen Autoren eingeführt worden. Die ausführlichste Darstellung ist das Buch von Antonelli, Burghleale und Kahn: The Concordance-Homotopy Groups of Geometric Automorphism Groups  $[A, B, K]$ . Dort wird  $\pi_i \widetilde{\text{Diff}}(M)$  in Form von zwei exakten Sequenzen im Prinzip berechnet.

Die Bestimmung des Unterschieds zwischen  $\pi_1 \text{Diff}(M)$  und  $\widetilde{\pi}_1 \text{Diff}(M)$  ist ein sehr viel schwierigeres Problem, das mit der Berechnung der Homotopiegruppen der Konkordanzräume zusammenhängt. Das erst tiefliegende Resultat in dieser Richtung ist der Satz von Cerf, daß für 1-zusammenhängende Mannigfaltigkeiten der Dimension größer gleich 5 die natürliche Abbildung  $\pi_0 \text{Diff}(M) \longrightarrow \pi_0 \widetilde{\text{Diff}}(M)$  ein Isomorphismus ist [Ce]. In der Folgezeit führten große Anstrengungen zu einer theoretischen Klärung des Zusammenhangs. Diese Ergebnisse erlauben zumindest rational einige konkrete Berechnungen. [B.L], [B<sub>2</sub>], [Mei].

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich in seinem Hauptteil mit den Blockdiffeomorphismengruppen  $\pi_i \widetilde{\text{Diff}}(M)$ . Im oben angesprochenen klassischen Ansatz wird  $\pi_i \widetilde{\text{Diff}}(M)$  mit  $\pi_i \text{aut}(M)$ , der i-ten Homotopiegruppe der Homotopieäquivalenzen von M, verglichen. Die natürliche Abbildung  $\pi_i \widetilde{\text{Diff}}(M) \longrightarrow \pi_i \text{aut}(M)$  paßt in eine lange exakte Sequenz, deren dritter Term mit Hilfe von klassischer Surgery-Theorie bestimmt werden kann.

Konkrete Berechnungen sind damit nur bei Kenntnis von  $\pi_i \text{aut}(M)$  möglich. Leider ist die Berechnung von  $\pi_i \text{aut}(M)$  selber ein schwieriges Problem.

Auf den klassischen Ansatz wird kurz in § 1 eingegangen.

In dieser Arbeit wird der Surgery-Ansatz von M. Kreck für die Berechnung von  $\pi_i \widetilde{\text{Diff}}(M)$  angewendet [Kr<sub>1</sub>].

§ 2 dient der Einführung der für diese Arbeit grundlegenden Begriffe. Wir führen den k-Typ  $B_k(M)$  einer Mannigfaltigkeit M

## Einleitung

Neben der Klassifikation der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist das Studium der Diffeomorphismen einer Mannigfaltigkeit eines der wesentlichen Probleme der Differentialtopologie. Eine besondere Bedeutung spielt dabei die Bestimmung des Homotopietyps von  $\text{Diff}(M)$ , der Gruppe aller Diffeomorphismen, insbesondere die Bestimmung der Homotopiegruppen  $\pi_i \text{Diff}(M)$ . Der Homotopietyp von  $\text{Diff}(M)$  ist nur in sehr wenigen Fällen vollständig bekannt, nämlich für eindimensionale Mannigfaltigkeiten, für Flächen und für die dreidimensionale Sphäre. In den letzten Jahren sind große Anstrengungen unternommen worden, um im allgemeinen Fall Informationen über den Homotopietyp von  $\text{Diff}(M)$  zu erhalten.

Die Berechnung der Homotopiegruppen  $\pi_i \text{Diff}(M)$  führt auf das Problem, einen mit der Projektion auf  $S^i$  verträglichen Diffeomorphismus  $f: S^i \times M \longrightarrow S^i \times M$  auf  $D^{i+1} \times M$  fortzusetzen, so daß die Fortsetzung ebenfalls mit der Projektion auf die erste Komponente verträglich ist.

Das Fortsetzungsproblem ohne die Verträglichkeitsbedingung führt zum Studium der Blockdiffeomorphismen einer Mannigfaltigkeit. Die Homotopiegruppen der Blockdiffeomorphismen  $\pi_i \widetilde{\text{Diff}}(M)$  sind von verschiedenen Autoren eingeführt worden. Die ausführlichste Darstellung ist das Buch von Antonelli, Burghlea und Kahn: The Concordance-Homotopy Groups of Geometric Automorphism Groups  $[A, B, K]$ . Dort wird  $\pi_i \widetilde{\text{Diff}}(M)$  in Form von zwei exakten Sequenzen im Prinzip berechnet.

Die Bestimmung des Unterschieds zwischen  $\pi_1 \text{Diff}(M)$  und  $\widetilde{\pi}_1 \text{Diff}(M)$  ist ein sehr viel schwierigeres Problem, das mit der Berechnung der Homotopiegruppen der Konkordanzräume zusammenhängt. Das erst tiefliegende Resultat in dieser Richtung ist der Satz von Cerf, daß für 1-zusammenhängende Mannigfaltigkeiten der Dimension größer gleich 5 die natürliche Abbildung  $\pi_0 \text{Diff}(M) \longrightarrow \pi_0 \widetilde{\text{Diff}}(M)$  ein Isomorphismus ist [Ce]. In der Folgezeit führten große Anstrengungen zu einer theoretischen Klärung des Zusammenhangs. Diese Ergebnisse erlauben zumindest rational einige konkrete Berechnungen. [B.L], [B<sub>2</sub>], [Mei].

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich in seinem Hauptteil mit den Blockdiffeomorphismengruppen  $\pi_i \widetilde{\text{Diff}}(M)$ . Im oben angesprochenen klassischen Ansatz wird  $\pi_i \widetilde{\text{Diff}}(M)$  mit  $\pi_i \text{aut}(M)$ , der i-ten Homotopiegruppe der Homotopieäquivalenzen von M, verglichen. Die natürliche Abbildung  $\pi_i \widetilde{\text{Diff}}(M) \longrightarrow \pi_i \text{aut}(M)$  paßt in eine lange exakte Sequenz, deren dritter Term mit Hilfe von klassischer Surgery-Theorie bestimmt werden kann.

Konkrete Berechnungen sind damit nur bei Kenntnis von  $\pi_i \text{aut}(M)$  möglich. Leider ist die Berechnung von  $\pi_i \text{aut}(M)$  selber ein schwieriges Problem.

Auf den klassischen Ansatz wird kurz in § 1 eingegangen.

In dieser Arbeit wird der Surgery-Ansatz von M. Kreck für die Berechnung von  $\pi_i \widetilde{\text{Diff}}(M)$  angewendet [Kr<sub>1</sub>].

§ 2 dient der Einführung der für diese Arbeit grundlegenden Begriffe. Wir führen den k-Typ  $B_k(M)$  einer Mannigfaltigkeit M

ein.  $B_k(M)$  ist eine Faserung über  $B0$ , die das  $(k+1)$ -Gerüst von  $M$ , zusammen mit dem stabilen Normalenbündel von  $M$ , eingeschränkt auf dieses  $(k+1)$ -Gerüst, geeignet approximiert.

Außerdem definieren wir die Gruppe  $NS_k(D^i \times M; \bar{\nu}_i)$  der relativen Normalen- $k$ -Smoothings auf  $D^i \times M$ .

$NS_k(D^i \times M; \bar{\nu}_i)$  läßt sich mit Hilfe von Surgery-Theorie, wie sie in  $[Kr_1]$  entwickelt worden ist, berechnen.

Das führt zu einer exakten Surgery-Sequenz für relative Normalen- $k$ -Smoothings auf  $D^i \times M$ , die das Hauptergebnis von § 3 ist:

$$\begin{aligned} \text{Für } n \geq 4 \text{ und } k \geq \left\lfloor \frac{n+i-1}{2} \right\rfloor \text{ gibt es unter gewissen} \\ \text{kleineren Voraussetzungen eine exakte Sequenz} \\ \rightarrow L_{i+1,n}^{(k)}(M) \xrightarrow{\partial} NS_k(D^i \times M; \bar{\nu}_i) \xrightarrow{\gamma} \Omega_{n+i}^{B_k(M)} \xrightarrow{\Theta} L_{i,n}^{(k)}(M) \\ \dots \rightarrow NS_k(D^1 \times M; \bar{\nu}_1) \rightarrow \Omega_{n+1}^{B_k(M)} \rightarrow L_{1,n}^{(k)}(M) \\ (\text{Satz 3.7}). \end{aligned}$$

Dabei sind  $\Omega_q^{B_k(M)}$  die Bordismusgruppen von  $q$ -dimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeiten mit  $B_k(M)$ -Struktur und  $L_{j,n}^{(k)}(M)$  geeignete Surgery-Hindernisgruppen.

Für  $i \geq 2$  und  $k > \left\lfloor \frac{n+i}{2} \right\rfloor$  ist  $L_{i,n}^{(k)}(M) = L_{n+i}^S(\pi_1(M), w_1(M))$  die übliche Wall'sche Surgery-Gruppe.

Es gibt einen Homomorphismus  $NS_k(D^i \times M; \bar{\nu}_i) \xrightarrow{\beta_i} \pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M)$ . Diese Abbildung paßt in eine exakte Sequenz, die in § 4 hergeleitet wird. Der dritte Term in dieser Sequenz besteht aus Homotopieklassen von Faserhomotopieäquivalenzen von  $B_k(M)$ , die mit einer Standard- $B_k(M)$ -Struktur  $\bar{\nu}_i$  auf  $S^{i-1} \times M$  verträglich sind. Diese Gruppe wird mit

$\text{Aut}((B_k(M), p) \text{rel } \bar{\nu}_i)$  bezeichnet.

Es stellt sich heraus, daß  $\text{Aut}((B_k(M), p) \text{rel } \bar{\nu}_i)$  in gewissen Fällen einfacher zu berechnen ist als der entsprechende Term  $\pi_1^{\text{aut}}(M)$  in der Sequenz des klassischen Ansatzes.

Wir leiten eine exakte Sequenz zur Bestimmung von  $\text{Aut}((B_k(M), p) \text{rel } \bar{\nu}_i)$  her. Ist die Mannigfaltigkeit  $M$  z.B.  $(k-i+1)$ -zusammenhängend, so gibt es eine exakte Sequenz

$$\begin{aligned} \pi_{i+1}(B) &\xrightarrow{P_*} \pi_{i+1}(B_0) \longrightarrow \text{Aut}((B_k(M), p) \text{rel } \bar{\nu}_i) \\ &\longrightarrow \pi_i(B) \xrightarrow{P_*} \pi_i(B_0). \end{aligned}$$

Daraus erhält man, daß für  $i > n+1$  und  $k = \left\lfloor \frac{n+i-1}{2} \right\rfloor$

$\text{NS}_k(D^i \times M; \bar{\nu}_i) \xrightarrow{\beta_i} \pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M)$  ein Isomorphismus ist.

Ist z.B.  $M$  1-zusammenhängend,  $n+i$  gerade,  $\neq 6, 14$ ,  $k = \frac{n+i}{2} - 1$

und  $\hat{\Omega}_{n+i}^{B_k(M)} = \text{Kern}(\Omega_{n+i}^{B_k(M)} \xrightarrow{\otimes} L_{n+i}(e))$  der Kern der Signatur, bzw. Arf-Invariante, so folgt, daß für  $i > n+1$   $\pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M)$  und  $\hat{\Omega}_{n+i}^{B_k(M)}$  isomorph sind.

In § 5 wird für eine 1-zusammenhängende 4-dimensionale Mannigfaltigkeit  $M$   $\pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M)$  berechnet.

Ist z.B.  $M$  eine Spin-Mannigfaltigkeit, so gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \pi_2(M) \longrightarrow \Omega_6^{\text{Spin}}(K(\pi_2(M), 2)) \longrightarrow \pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0.$$

Für  $\Omega_6^{\text{Spin}}(K(\pi_2(M), 2))$  gibt es eine Injektion

$$\Omega_6^{\text{Spin}}(K(\pi_2(M), 2)) \longrightarrow H_6(K(\pi_2(M), 2) \times B \text{Spin}; \mathbb{Z})$$

mit endlichem Kokern, gegeben durch das Bild der Fundamentalklasse.

Die Beschäftigung mit Diffeomorphismen auf 4-Mannigfaltigkeiten war einer der Gründe zum Entstehen dieser Arbeit.

Die Ergebnisse von Donaldson über 4-Mannigfaltigkeiten

ließen das Problem aufkommen, ob für eine zusammenhängende

Summe von  $r$  projektiven Ebenen  $M_r = \#_{i=1}^r P_2\mathbb{C}$

$\text{Diff}(M_r \text{ rel } \bigcup_{j=1}^{r-1} S_j^3)$  Deformationsretrakt von  $\text{Diff}(M_r)$  ist.

Dabei sind  $S_j^3 \subset M_r$ ,  $j=1, \dots, r-1$ , Sphären, längs derer

die zusammenhängende Summe gebildet wird und  $\text{Diff}(M_r \text{ rel } \bigcup_{j=1}^{r-1} S_j^3)$

die Gruppe der Diffeomorphismen von  $M_r$ , die eine Umgebung

von  $\bigcup_{j=1}^{r-1} S_j^3$  festlassen.

Wir zeigen, daß für  $r \geq 3$   $\pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M_r \text{ rel } \bigcup_{j=1}^{r-1} S_j^3) \rightarrow \pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M_r)$

kein Isomorphismus ist.

Die hier durchgeführte Berechnung von  $\pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M)$  deckt einen

Fehler bei der Berechnung von Homotopiegruppen von

Homotopieäquivalenzen in  $[A, B, K]$  auf.

Darauf wird am Ende von § 5 eingegangen.

In Kapitel 6 beschäftigen wir uns mit rationalen Berechnungen

von  $\pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M)$ . Für genügend hochzusammenhängende Mannig-

faltigkeiten werden in einem gewissen Dimensionsbereich

exakte Sequenzen hergeleitet, die rational eine konkrete

Berechnung von  $\pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M)$  erlauben.

Für  $4m$ -dimensionale  $(2m-1)$ -zusammenhängende fast-parallelisier-

bare Mannigfaltigkeiten erhält man z.B. für  $2 \leq i \leq 4m-2$

eine exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H_i(M; \mathbb{Q}) &\longrightarrow H_{4m+i}(K(\pi_{2m}(M), 2m) \times \hat{B}O_{\pi_{2m-1}}, \langle k+2 \rangle; \mathbb{Q}) \\ &\longrightarrow \pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \pi_{i-1}(SO) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow 0 \\ (k = \lfloor \frac{4m+i-1}{2} \rfloor). \end{aligned}$$

In § 7 soll schließlich auf die Berechnung von  $\pi_0 \text{Diff}(M)$

und  $\pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M)$  für  $(n-1)$ -zusammenhängende  $2n$ -Mannigfaltig-

keiten und auf  $\pi_0 \text{Diff}(M)$  für  $(n-1)$ -zusammenhängende

$(2n+1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten eingegangen werden.

Dabei wird vorausgesetzt, daß die Mannigfaltigkeiten fast-parallelisierbar sind.

Der Fall  $\pi_0 \text{Diff}(M^{2n})$  wurde bereits in  $[Kr_3]$  behandelt und wird hier in etwas anderer Form erneut hergeleitet.

Der  $n$ -Typ von  $M$  ist in beiden Fällen die Faserung

$$K(\pi_n(M), n) \times BO\langle n+2 \rangle \xrightarrow{Pr_2 \circ Pr_1} BO.$$

$\Omega_q^{B_n(M)} = \Omega_q^{\langle n+2 \rangle}(K(\pi_n(M), n))$  ist über die Thom-Pontrjagin-Konstruktion isomorph zu  $\widetilde{\pi}_q(K(\pi_n(M), n)^+ \wedge MO\langle n+2 \rangle)$ ,

und wird für  $q = 2n+1$  und  $q = 2n+2$  mit Hilfe von

Kofasersequenzen und der Kenntnis der stabilen Homotopie von Eilenberg-Mc-Lane-Räumen in gewissen Fällen bestimmt.

Die in § 6 hergeleiteten Sequenzen erlauben dann in vielen Fällen die Berechnung von  $\pi_0 \text{Diff}(M)$ , bzw.  $\widetilde{\pi}_1 \text{Diff}(M)$ .

In den abschließenden Kapiteln 8 und 9 wenden wir uns Bordismusproblemen von Faserbündeln zu.

Die Untersuchung der Bordismusgruppe von Faserbündeln über  $X$  mit  $n$ -dimensionalen Fasern, die mit  $F_n(X)$  bezeichnet werden soll, führt zu Fortsetzungsproblemen für Diffeomorphismen.

Ist z.B.  $X = S^i$  eine  $i$ -dimensionale Sphäre, so ist die Frage zu untersuchen, wann es eine Mannigfaltigkeit  $N$

mit  $\partial N = M$  gibt, so daß ein vorgegebener, mit der Projektion auf  $S^{i-1}$  kommutierender Diffeomorphismus  $f: S^{i-1} \times M \rightarrow S^{i-1} \times M$  zu einem Diffeomorphismus auf  $S^{i-1} \times N$ , der ebenfalls mit der Projektion auf  $S^{i-1}$  kommutiert, fortsetzbar ist.

Läßt man die Forderung der Verträglichkeit der Diffeomorphismen mit der Projektion auf  $S^{i-1}$  fallen, so erhält man die

Pseudobordismusgruppen  $\Psi F_n(S^i)$ .

Über die Bordismusgruppen  $F_n(X)$  ist sehr wenig bekannt.

Das Problem ist für  $X = S^1$  für  $n \geq 4$  von M. Kreck gelöst worden, für  $n = 3$  von P. Melvin und für  $n = 2$  von F. Bonahon  $[Kr_2]$ ,  $[Me]$ ,  $[Bon]$ .

Für  $n \geq 3$  sind keine weiteren Berechnungen für  $F_n(X)$  bekannt.

Wir definieren für Faserbündel über  $S^{r \cdot n}$ ,  $r=2,3$ , mit  $2n$ -dim. Fasern eine Bordismusinvariante in einer Wittgruppe von  $(-1)^n$ -symmetrischen unimodularen Formen zusammen mit  $(-1)^n$ -symmetrischen  $(r+2)$ -fach multilineareren Abbildungen nach  $\mathbb{Z}$ .

$$\text{Ist } \widetilde{F}_{2n}(S^{r \cdot n}) = \text{Kern } (F_{2n}(S^{r \cdot n}) \longrightarrow \mathcal{Q}_{2n} \oplus \mathcal{Q}_{(r+2)n}) \\ [M \longrightarrow E \longrightarrow S^{r \cdot n}] \mapsto ([M], [E]),$$

so können wir mit Hilfe der konstruierten Invarianten zeigen, daß  $\widetilde{F}_4(S^6)$  nichttrivial ist.

Also reichen die offensichtlichen Invarianten

zur Bestimmung einer Bordismusklass in  $F_n(S^i)$  im allgemeinen nicht aus.

Im letzten Teil von § 8 wird ein Fortsetzungssatz für

die Fortsetzbarkeit von  $f: S^{i-1} \times M \longrightarrow S^{i-1} \times M$  auf  $S^{i-1} \times N$  bei fest vorgegebenem  $N$  mit  $\partial N = M$  hergeleitet.

Dieser Satz führt zu einem hinreichenden Kriterium,

wann ein Faserbündel  $M^4 \longrightarrow E \longrightarrow S^2$  mit 1-zusammenhängender Faser und  $w_2(E) = 0$  in  $\Psi F_4(S^2)$  null ist.

In Kapitel 9 geht es schließlich um Bordismus von Faser-

bündeln über einem Wedge von 1-Sphären  $X_r = \bigvee_{i=1}^r S^1$ .

Ein Faserbündel über  $X_r$  ist gegeben durch die Faser  $M$

und  $r$  Diffeomorphismen  $f_1, \dots, f_r: M \longrightarrow M$ .

Wir zeigen, daß die Bordismusklassse eines Faserbündels über  $X_r$  für  $n \geq 3$  durch die Bordismusklassse der Faser, den Bordismusklassen der Abbildungstori

$M_{f_i} = [0, 1] \times M / (x, 0) \sim (f_i(x), 1)$  und für  $n \equiv 0 \pmod{2}$  die isometrische Struktur  $I(M; f_1, \dots, f_r)$  in  $W_{(-1)}^{\star}(\mathbb{Z}; \mathbb{Z})$  vollständig bestimmt ist und berechnen die Gruppe  $F_n(X_r)$  für  $n \geq 3$ .

Die Bordismusgruppen  $F_n(X)$  liefern für jedes  $n$  einen kontravarianten Homotopiefunktor auf der Kategorie der endlichen, punktierten CW-Komplexe. Aus der Berechnung von  $F_n(X_r)$  folgt, daß dieser Funktor für  $n \equiv 0 \pmod{2}$ ,  $n \geq 4$ , nicht das Wedge-Axiom erfüllt und damit nicht durch einen klassifizierenden Raum dargestellt werden kann.

Zum Abschluß wird auf die Frage eingegangen, wann ein Bündel  $E \rightarrow X_{2r}$  bis auf Bordismus auf die orientierte Fläche  $M_r$  vom Geschlecht  $r$  fortgesetzt werden kann.

Ist  $n$  ungerade, so ist das immer möglich;

für  $n \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $n \geq 8$  gilt das genau dann, wenn die isometrische Struktur  $I(M; f_1, \dots, f_r)$  im Bild der kanonischen Abbildung

$$W_+(\pi_1(M_r); \mathbb{Z}) \longrightarrow W_+(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \text{ liegt.}$$

Herzlich danken möchte ich Herrn Prof. M. Kreck für die Stellung des Themas, für die Betreuung beim Entstehen dieser Arbeit und für die in jeder Beziehung gute Zusammenarbeit während dieser Zeit.

In gleicher Weise gilt mein herzlicher Dank Herrn Dr. S. Stolz, insbesondere für viele anregende und ermutigende Diskussionen.

Inhaltsverzeichnis

|     |                                                                                                                                                       |     |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 1 | Blockdiffeomorphismen von Mannigfaltigkeiten -<br>Der klassische Ansatz zur Berechnung                                                                | 1   |
| § 2 | Relative Normalen-k-Smoothings auf $D^i \times M$                                                                                                     | 6   |
| § 3 | Die Surgery-Sequenz für relative Normalen-<br>-k-Smoothings auf $D^i \times M$                                                                        | 25  |
| § 4 | $\overline{\mathcal{V}}_1$ -kompatible Faserhomotopieäquivalenzen von B                                                                               | 52  |
| § 5 | Anwendung auf einfach zusammenhängende<br>4-dimensionale Mannigfaltigkeiten                                                                           | 77  |
| § 6 | Hochzusammenhängende Mannigfaltigkeiten -<br>einige rationale Berechnungen von Block-<br>diffeomorphismen                                             | 98  |
| § 7 | Berechnung von $\pi_0 \text{Diff}(M)$ und $\widetilde{\pi}_1 \text{Diff}(M)$ für<br>hochzusammenhängende fast-parallelisierbare<br>Mannigfaltigkeiten | 115 |
| § 8 | Bordismus und Pseudobordismus von Faserbündeln<br>über Sphären                                                                                        | 139 |
| § 9 | Bordismus von Faserbündeln über einem Wedge<br>von 1-Sphären                                                                                          | 163 |



§ 1 Blockdiffeomorphismen von Mannigfaltigkeiten -  
Der klassische Ansatz zur Berechnung

In diesem einführenden Paragraphen sollen die Homotopiegruppen der Blockdiffeomorphismen auf einer Mannigfaltigkeit eingeführt und kurz das klassische Verfahren zur Bestimmung dieser Gruppen dargestellt werden. Es folgen einige Bemerkungen über Probleme bei der konkreten Berechnung von Blockdiffeomorphismen mit dieser Methode.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Diffeomorphismen auf Mannigfaltigkeiten. Unter einer Mannigfaltigkeit  $M$  wird stets eine unendlich oft differenzierbare Mannigfaltigkeit verstanden. Die auftretenden Mannigfaltigkeiten sind im allgemeinen kompakt.

Ein Diffeomorphismus von  $M$  ist eine bijektive  $C^\infty$ -Abbildung von  $M$  in sich, so daß auch die Umkehrabbildung unendlich oft differenzierbar ist.

Die Gruppe der Diffeomorphismen von  $M$  läßt sich durch Einführung der  $C^\infty$ -Topologie zu einer topologischen Gruppe machen, die sogar die Struktur einer Mannigfaltigkeit trägt [Le]. Diese Gruppe wird mit  $\text{Diff}(M)$  bezeichnet.

Das Studium der Homotopiegruppen von  $\text{Diff}(M)$  zerfällt in zwei Gebiete: in die Berechnung der Homotopiegruppen der Blockdiffeomorphismen und in die Berechnung der Konkordanzen von  $M$ .

Definition 1.1: Sei  $M$  eine kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand und  $S^i = D_+^i \cup D_-^i$  die Zerlegung von  $S^i$  in die obere und untere Hemisphäre.

Dann heißt

$$\left\{ f \mid \begin{array}{l} f \in \text{Diff}(S^i \times M) \\ f|_{D_-^i \times M} = \text{Id} \end{array} \right\} / \left\{ f \mid \begin{array}{l} f \in \text{Diff}(S^i \times M), f|_{D_-^i \times M} = \text{Id} \\ f \text{ ist zu einem Diffeomorphismus} \\ \text{auf } D^{i+1} \times M \text{ fortsetzbar} \end{array} \right\}$$

die  $i$ -te Homotopiegruppe der Blockdiffeomorphismen von  $M$ .

Diese Gruppe wird mit  $\pi_i \widetilde{\text{Diff}}(M)$  bezeichnet.

Die Gruppenstruktur ist durch Komposition von Diffeomorphismen auf  $S^i \times M$  induziert.

Bemerkung 1.2: Die so definierte Gruppe  $\pi_i \widetilde{\text{Diff}}(M)$  ist  $i$ -te Homotopiegruppe einer simplizialen Gruppe  $\widetilde{\text{Diff}}(M)$ .

Ein  $k$ -Simplex von  $\widetilde{\text{Diff}}(M)$  ist ein Diffeomorphismus

$$h: M \times \Delta[k] \rightarrow M \times \Delta[k] \text{ mit } h|_{M \times d_j(\Delta[k])} \in M \times d_j(\Delta[k]),$$

wobei  $\Delta[k]$  der Standard- $k$ -Simplex und  $d_j$  die entsprechende Randabbildung von  $\Delta[k]$  ist. ( $[B_1], [B.L.R.]$ ).

Bemerkung 1.3: Ist  $X \subset M$  eine abgeschlossene Teilmenge,

so lassen sich folgende Untergruppen von  $\text{Diff}(M)$  definieren:

- i)  $\text{Diff}(M, X) = \{ f \mid f \in \text{Diff}(M) \text{ mit } f|_X = \text{Id}_X \}$
- ii)  $\text{Diff}(M \text{ rel } X) = \left\{ f \mid \begin{array}{l} f \in \text{Diff}(M), \text{ s.d. es Umgebung } U \text{ von} \\ X \text{ in } M \text{ gibt mit } f|_U = \text{Id}_U \end{array} \right\}$

Eine 1.1 entsprechende Definition führt zu Blockdiffeomorphismengruppen  $\pi_i \widetilde{\text{Diff}}(M, X)$  und  $\pi_i \widetilde{\text{Diff}}(M \text{ rel } X)$ .

Die Bestimmung des Unterschieds zwischen  $\pi_i \widetilde{\text{Diff}}(M)$  und  $\pi_i \text{Diff}(M)$  ist ein schwieriges Problem und läuft auf die

Untersuchung der Konkordanzen von M hinaus.

In den letzten Jahren sind dabei große Erfolge erzielt worden (Vgl. z.B.  $[B_2]$ ,  $[B.L]$ ).

Wir gehen in dieser Arbeit auf diese Berechnungen nicht ein, sondern beschränken uns auf Blockdiffeomorphismen.

Als nächstes soll die bekannte Methode skizziert werden, wie sich  $\pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M)$  in Form von zwei langen exakten Sequenzen bestimmen läßt. Die Standardreferenz für diese Sequenzen ist  $[A,B,K]$ .

Satz 1.4: Sei  $M$  eine geschlossene Mannigfaltigkeit mit

$$\pi_1(M) = \pi.$$

$\text{aut}(M)$  der Monoid der Homotopieäquivalenzen von  $M$ , versehen mit der kompakt-offenen Topologie,

$\mathcal{J}(D^i \times M)$  die Smoothigs von  $D^i \times M$  (, d.h. die Homotopieäquivalenzen  $h: V \rightarrow D^i \times M$ , s.d.  $h|_{\partial V}: \partial V \rightarrow S^{i-1} \times M$  ein Diffeomorphismus ist, nach einer geeigneten Äquivalenzrelation),

$L_q^s(\pi)$  die  $q$ -te Wall'sche Surgery-Hindernis-Gruppe und

$G/O$  die Homotopiefaser von  $BO \rightarrow BG$ .

Dann gibt es lange exakte Sequenzen von Gruppen

$$\begin{aligned} (1) \quad & \rightarrow \pi_i \text{aut}(M) \rightarrow \mathcal{J}(D^i \times M) \rightarrow \pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M) \rightarrow \pi_{i-1} \text{aut}(M) \rightarrow \\ (2) \quad & \rightarrow L_{n+i+1}^s(\pi) \rightarrow \mathcal{J}(D^i \times M) \rightarrow [\Sigma_{M_+}^i; G/O] \rightarrow L_{n+i}^s(\pi) \rightarrow, \\ & \text{falls } n+i \geq 6. \end{aligned}$$

Beweis:  $[A,B,K]$ .

Bemerkung 1.5: Die Sequenzen (1) und (2) lassen sich zur

Berechnung von  $\pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M \text{ rel } X)$  entsprechend verallgemeinern.  
[Vgl. A,B,K]

Sequenz (1) führt die Berechnung von  $\pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M)$  auf die Bestimmung der Smoothings  $\mathfrak{J}(D^i \times M)$ , auf die Bestimmung von  $\pi_{i-1} \text{aut}(M)$  und die Berechnung der verbindenden Abbildungen zurück.  $\mathfrak{J}(D^i \times M)$  läßt sich modulo der Kenntnis der stabilen Homotopie der Sphären in geeigneten Fällen aus der Surgery-Sequenz (2) bestimmen.

Die Berechnung der Homotopiegruppen von  $\text{aut}(M)$  ist schwierig und in nur sehr wenigen Fällen vollständig bekannt.

Als allgemeines Resultat dazu gibt es eine Spektralsequenz, deren  $E_2$  - Term sich aus den Homotopiegruppen und den Kohomologiegruppen von  $M$  bestimmen läßt, die gegen  $\pi_* \text{aut}(M)$  konvergiert [Fe]. Im allgemeinen liefert das nur eine Abschätzung für  $\pi_i \text{aut}(M)$ , da die Differentiale dieser Spektral-Sequenz schwer zu entscheiden sind.

In  $[A,B,K]$  ist  $\pi_i \text{aut}(M \text{ rel } X)$  berechnet worden, wenn  $M \setminus X$  homotopieäquivalent zu einem H-Raum ist. Für  $i \geq 1$  gilt in diesem Fall

$$\pi_i \text{aut}(M \text{ rel } X) \cong \left[ \Sigma^i(M/X), M \setminus X \right].$$

Diese Aussage ist, obwohl in  $[A,B,K]$  so behauptet, für den Fall, daß  $M \setminus X$  homotopieäquivalent zu einem Wedge von Sphären ist, im allgemeinen nicht mehr richtig (Vgl. § 5). Daraus ergibt sich, daß der klassische Ansatz bereits für hochzusammenhängende Mannigfaltigkeiten nicht so ohne weiteres die Bestimmung von  $\pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M)$  erlaubt.

Ansonsten sind für die Berechnung von  $\pi_1 \text{aut}(M)$  im wesentlichen nur rationale Berechnungen bekannt, z.B. für projektive

Räume und homogene Räume (z.B.  $[\text{Mei}]$ ).

In den nächsten 3 Kapiteln soll eine Methode entwickelt werden, bei der der Unterschied zwischen dem Teil von  $\widetilde{\pi}_* \text{Diff}(M)$ , der mit Hilfe von Surgery-Methoden berechnet wird, und  $\widetilde{\pi}_* \text{Diff}(M)$  durch eine Gruppe gemessen wird, die in gewissen Fällen einfacher als  $\pi_* \text{aut}(M)$  zu berechnen ist.

## § 2 Relative Normalen-k-Smoothings auf $D^i \times M$

Ziel dieses Paragraphen ist die Einführung der relativen Normalen-k-Smoothings auf  $D^i \times M$ . Diese k-Smoothings ersetzen die relativen Smoothings beim klassischen Ansatz zur Berechnung von Blockdiffeomorphismen. Auf der Menge der relativen Normalen-k-Smoothings von  $D^i \times M$  soll eine Verknüpfung eingeführt werden, die diese Menge zu einer Halbgruppe macht.

Die wesentlichen Begriffe und Definitionen sind bereits in  $[Kr_1]$ , § 1 enthalten. Weil sie grundlegend für diese Arbeit sind, sollen sie hier noch einmal aufgeführt werden.

Ist  $X^m \xhookrightarrow{i} \mathbb{R}^{m+t}$  eine eingebettete m-dimensionale Mannigfaltigkeit, so ist die Normalen-Gaußabbildung  $\mathcal{V}_X = \mathcal{V}_X^i : X \longrightarrow G_t(\mathbb{R}^{m+t})$ ,  $x \longmapsto \mathcal{V}(X, \mathbb{R}^{m+t})_x$  definiert, wobei  $G_t(\mathbb{R}^{m+t})$  die Grassmann-Mannigfaltigkeit der t-dimensionalen Untervektorräume des  $\mathbb{R}^{m+t}$  bezeichnet.

Diese Gaußabbildung definiert durch Komposition mit den

Inklusionen  $G_t(\mathbb{R}^{m+t}) \subset G_t(\mathbb{R}^\infty) = BO(t)$  und

$BO(t) \subset \bigcup_{r=1}^{\infty} BO(r) = BO$  die stabile Gaußabbildung

$\mathcal{V}_X : X \longrightarrow BO$ .

Ist X eine Mannigfaltigkeit mit Rand, so soll X im allgemeinen in  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{m+t-1}$  eingebettet sein, der Art daß  $\partial X \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{m+t-1}$  und  $\mathcal{V}_X|_{\partial X} = \mathcal{V}_{\partial X}$  gilt.

Die letzte Bedingung ist insbesondere dann erfüllt, wenn es ein  $\varepsilon > 0$  gibt, so daß  $X \cap ([0, \varepsilon] \times \mathbb{R}^{m+t-1}) = [0, \varepsilon] \times \partial X$ .

Sei  $p: B \longrightarrow BO$  eine Faserung über BO und  $X^m \xhookrightarrow{i} \mathbb{R}_+^{m+t}$

eine eingebettete  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^{m+t}$ ,

$t \gg m$ . Zwei Lifte  $\bar{\nu}_X, \bar{\nu}'_X: X \longrightarrow B$  der Gaußabbildung

$\nu^i_X: X \longrightarrow B_0$  heißen äquivalent, wenn es eine Homotopie

$H: X \times I \longrightarrow B$  zwischen  $\bar{\nu}'_X$  und  $\bar{\nu}_X$  gibt, so daß für alle

$t \in [0, 1]$   $p \circ H|_{X \times \{t\}} = \nu^i_X$  gilt.

Ist  $X^m \xrightarrow{j} \mathbb{R}^{m+t}_+$  eine weitere Einbettung von  $X$ , so induziert

eine Isotopie zwischen  $i$  und  $j$  eine kanonische Bijektion

zwischen den Homotopieliften von  $\nu^i_X$  und denen von  $\nu^j_X$ .

Wenn sich zwei Homotopielifte

$$(X \xrightarrow{i} \mathbb{R}^{m+t}_+, \bar{\nu}_X) \text{ und } (X \xrightarrow{j} \mathbb{R}^{m+t}_+, \bar{\nu}'_X)$$

unter dieser Bijektion entsprechen, so heißen sie äquivalent.

Eine  $B$ -Struktur von  $X$  ist eine Äquivalenzklasse bezüglich

dieser Relation.

Ist  $\bar{\nu}_X: X \longrightarrow B$  ein Lift von  $\nu_X$ , so ist  $-\bar{\nu}_X: X \longrightarrow B$

wie folgt definiert:

Sei  $h: I \times X \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m+t}$  eine Einbettung mit

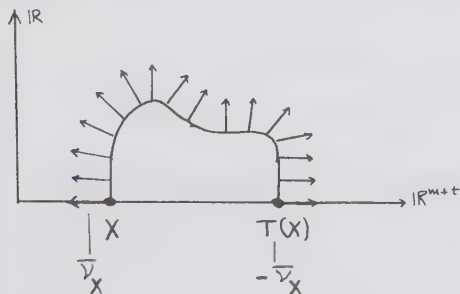
$h(t, x) = (t, x)$ ,  $h(1-t, x) = (t, T(x))$  für  $0 \leq t \leq \epsilon$ ,  $\epsilon < \frac{1}{2}$ ,

wobei  $T: (\mathbb{R}^{m+t}_+, \{0\} \times \mathbb{R}^{m+t-1}) \longrightarrow (\mathbb{R}^{m+t}_+, \{0\} \times \mathbb{R}^{m+t-1})$  eine

Translation mit  $T(X) \cap X = \emptyset$  ist.

Die  $B$ -Struktur  $\bar{\nu}_X$  auf  $\{0\} \times X$  läßt sich auf  $I \times X$  fort-

setzen. Die Einschränkung auf  $\{1\} \times X$  liefert  $-\bar{\nu}_X$ .



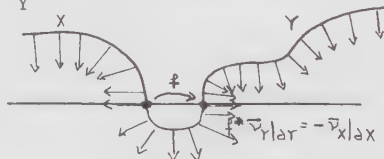
Ist  $f: X \longrightarrow Y$  ein Diffeomorphismus und  $\overline{\nabla}_Y$  eine B-Struktur von  $Y$ , so induziert die Einbettung  $X \xrightarrow{f} Y \hookrightarrow \mathbb{R}_+^{m+t}$  eine B-Struktur  $f^* \overline{\nabla}_Y$  auf  $X$ .

Ein Diffeomorphismus von B-Mannigfaltigkeiten

$$f: (X, \overline{\nabla}_X) \longrightarrow (Y, \overline{\nabla}_Y)$$

ist ein Diffeomorphismus  $f: X \longrightarrow Y$  mit  $f^* \overline{\nabla}_Y = \overline{\nabla}_X$ .

Sind  $(X, \overline{\nabla}_X)$  und  $(Y, \overline{\nabla}_Y)$  B-Mannigfaltigkeiten und ist  $f: (\partial X, \overline{\nabla}_X|_{\partial X}) \longrightarrow (\partial Y, -\overline{\nabla}_Y|_{\partial Y})$  ein Diffeomorphismus von B-Mannigfaltigkeiten, so gibt es auf  $X \cup_f Y$  eine eindeutig bestimmte B-Struktur, die die gegebenen B-Strukturen auf  $X$  und  $Y$  fortsetzt. Diese B-Struktur wird mit  $\overline{\nabla}_X \cup_f \overline{\nabla}_Y$  bezeichnet.



Das gleiche gilt, wenn  $f$  ein Diffeomorphismus zwischen Untermannigfaltigkeiten der Ränder mit Kodimension null ist, der mit der B-Struktur im obigen Sinne verträglich ist.

Ist  $B \xrightarrow{p} BO$  eine Faserung und  $\overline{\nabla}_X: X \longrightarrow B$  eine Hochhebung von  $\nu_X$ , so ist  $X$  orientierbar, falls das universelle stabile Bündel  $p^*(\gamma|_{BO(t)})$  über  $B|_{BO(t)}$  für  $t \gg \dim X$  orientierbar ist.

In jedem Fall zeichnen wir in  $B$  einen Basispunkt  $*$  aus und

orientieren die Faser von  $p^*(\mathcal{Y}|_{B_0(t)})$  über  $*$  (lokale Orientierung von  $B$ ).

Alle Mannigfaltigkeiten seien ebenfalls in geeigneter Weise mit einem Basispunkt versehen, und Abbildungen nach  $B$  seien im folgenden basispunkterhaltend.

Für die Konstruktion von Faserungen mit vorgeschriebenen Eigenschaften ist es oft notwendig, eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen durch eine Faserung zu ersetzen. Wir erinnern hier an diese Technik.

Seien  $X$  und  $Y$  zwei topologische Räume und  $\varphi: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Mit  $F(Y)$  wird der Raum der stetigen Wege von  $I = [0, 1]$  nach  $Y$  bezeichnet und mit  $I^\varphi$  der Raum  $\{(x, u) \in X \times F(Y) \mid \varphi(x) = u(0)\}$ .

Dann ist  $p: I^\varphi \rightarrow Y$ ,  $(x, u) \mapsto u(1)$  eine Faserung.

Mittels der Inklusion  $\lambda: X \hookrightarrow I^\varphi$ ,  $x \mapsto (x, u_{\varphi(x)})$  ( $u_{\varphi(x)}: I \rightarrow Y$ ,  $t \mapsto \varphi(x)$  konstanter Weg)

läßt sich  $X$  als Teilraum von  $I^\varphi$  auffassen, und

$p_0: I^\varphi \rightarrow X$ ,  $(x, u) \mapsto x$  ist eine Deformationsretraktion.

Man erhält ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \lambda \downarrow \cong & & \nearrow p \\ I^\varphi & & \end{array}$$

$p: I^\varphi \rightarrow Y$  heißt die von  $\varphi$  induzierte Faserung.

(Vgl. [Wh, Chap. I, 7.30])

Ist  $\xi \longrightarrow X$  ein stabiles Vektorraumbündel, so ist die von  $\xi$  induzierte Faserung über  $B0$  die von einer klassifizierenden Abbildung  $\mathcal{V}_\xi: X \longrightarrow B0$  induzierte Faserung.

(Diese Faserung ist bis auf Faserhomotopieäquivalenz unabhängig von der Wahl der klassifizierenden Abbildung.)

Gilt  $X = X_1 \times X_2$  und  $\xi = \epsilon \times \xi'$ , wobei  $\epsilon$  das triviale Bündel

ist, so wählen wir  $\mathcal{V}_\xi$  stets in der Form  $\mathcal{V}_\xi = \mathcal{V}_{\xi'} \circ \text{pr}_{X_2}$

( $\text{pr}_{X_2}: X_1 \times X_2 \longrightarrow X_2$  Projektion auf die zweite Komponente).

Sei nun  $M^n$  die Mannigfaltigkeit, für die  $\widetilde{\text{Diff}}(M)$  untersucht werden soll.

Wir setzen voraus, daß M geschlossen und zusammenhängend ist.

Definition 2.1: Sei  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+t}$  eine Mannigfaltigkeit und  $B \xrightarrow{P} B0$  eine Faserung über  $B0$  mit Faser  $F$ .

$B$  sei homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex.

$B \xrightarrow{P} B0$  heißt Normalen- $k$ -Typ von  $M$ , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Für  $q \geq k+1$  gilt  $\pi_q(F) = \{0\}$ .
- (ii) Es gibt eine  $B$ -Struktur  $\overline{\mathcal{V}}_M: M \longrightarrow B$ , die eine Kofaserung und eine  $(k+1)$ -Äquivalenz ist.
- (iii) Für  $i \in \mathbb{N}$  existieren  $B$ -Strukturen  $\overline{\mathcal{V}}_i: D_+^i \times M \longrightarrow B$ , so daß  $\overline{\mathcal{V}}_i$  eine Kofaserung mit  $\overline{\mathcal{V}}_i|_{D_+^{i-1} \times M} = \overline{\mathcal{V}}_{i-1}$  für  $i \geq 1$  ist und  $\overline{\mathcal{V}}_1|_{\{1\} \times M} = \overline{\mathcal{V}}_M$  gilt.

Hilfssatz 2.2:

- a) Zu jeder Mannigfaltigkeit  $M$  existiert ein Normalen- $k$ -Typ.
- b) Der Normalen- $k$ -Typ von  $M$  ist bis auf Faserhomotopieäquivalenz eindeutig bestimmt.

Genauer:

Sind  $B \xrightarrow{p} B0$  und  $B' \xrightarrow{p'} B0$  zwei Faserungen,

$\bar{\nu}_M: M \rightarrow B$ ,  $\bar{\nu}'_M: M \rightarrow B'$  Hochhebungen der Gaußabbildung  $\nu_M$

und  $(\bar{\nu}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , bzw.  $(\bar{\nu}'_i)_{i \in \mathbb{N}}$  Familien von  $B$ -, bzw.  $B'$ -Strukturen,

so daß die Bedingungen (i), (ii) und (iii) in Definition 2.1

jeweils erfüllt sind, so gibt es zu beliebigem  $i_0 \in \mathbb{N}$

eine Faserhomotopieäquivalenz  $h(i_0): B \rightarrow B'$  mit

$h(i_0) \circ \bar{\nu}_i = \bar{\nu}'_i$  für alle  $i \leq i_0$ .

$h(i_0)$  ist bis auf Faserhomotopie eindeutig bestimmt.

### Beweis:

a) Sei  $\nu_M: M \rightarrow B0$  die Gaußabbildung von  $M$ . Durch Anheften von Zellen der Dimension  $q \geq k+2$  läßt sich ein CW-Komplex

$B'$  konstruieren, so daß

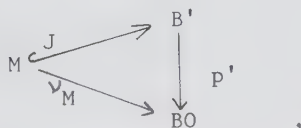
1) die Inklusion  $J: M \hookrightarrow B'$  eine  $(k+1)$ -Äquivalenz ist und

2)  $\nu_M: M \rightarrow B0$  sich auf  $B'$  fortsetzen läßt, der Art, daß für eine Fortsetzung  $p': B' \rightarrow B0$

$p'_*: \pi_q(B') \rightarrow \pi_q(B0)$  ein Isomorphismus für  $q \geq k+2$

und injektiv für  $q = k+1$  ist.

Wir erhalten auf diese Weise ein echt kommutatives Diagramm



und  $J$  ist die Inklusion eines endlichen Unterkomplexes in einen CW-Komplex, also insbesondere eine Kofaserung.

$S^\infty = BSO(1)$  sei mit der durch den Aufbau  $S^\infty = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S^i$

gegebenen CW-Struktur versehen. Dann ist für alle  $i \in \mathbb{N}$

folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc}
 D_+^i \times M & \xrightarrow{j_i \times J} & S^\infty \times B' \\
 \downarrow \text{BSO}(1) \times \text{BO} & & \downarrow \text{BSO}(1) \times \text{BO} \\
 \text{BO} & \xlongequal{\quad} & \text{BO}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{Id} \times p' \\
 \downarrow p''
 \end{array}$$

$\downarrow \mathcal{V}_{D_+^i \times M}$

Dabei ist  $j_i: D_+^i \hookrightarrow S^i \hookrightarrow S^\infty$  die kanonische Inklusion;  
 und  $\text{BSO}(1) \times \text{BO} \longrightarrow \text{BO}$  ist durch die Whitney-Summe gegeben.

$\bar{n}_i = j_i \times J$  ist eine  $(k+1)$ -Äquivalenz, und  $p''$  hat die gleichen Eigenschaften wie  $p'$ , da die Homotopiegruppen von  $S^\infty$  verschwinden. Wir ersetzen nun  $S^\infty \times B' \xrightarrow{p''} \text{BO}$  durch die von  $p''$  induzierte Faserung  $I^{p''} \xrightarrow{p} \text{BO}$ :

$$\begin{array}{ccc}
 D_+^i \times M & \xrightarrow{\bar{n}_i} & S^\infty \times B' \xrightarrow{\lambda} I^{p''} = B \\
 \searrow \mathcal{V}_{D_+^i \times M} & & \downarrow p'' \\
 & & \text{BO} \xleftarrow{p}
 \end{array}$$

Nach Konstruktion von  $B' \xrightarrow{p'} \text{BO}$  gilt für  $B \xrightarrow{p} \text{BO}$

$\mathcal{T}_q(F) = \{0\}$  für  $q \geq k+1$ , d.h. (i) ist erfüllt.

$\lambda \circ \bar{n}_i = \bar{\mathcal{V}}_i$  ist eine B-Struktur von  $D_+^i \times M$ . Da  $\bar{n}_i$  eine  $(k+1)$ -Äquivalenz ist, gilt das auch für  $\bar{\mathcal{V}}_i$ .

Da  $\lambda(S^\infty \times B') \subset I^{p''} = B$  Deformationsretrakt von  $B$  ist, ist  $\bar{\mathcal{V}}_i$  ebenfalls eine Kofaserung.

Ferner gilt für  $i \geq 1$

$\bar{\mathcal{V}}_i|_{D_+^{i-1} \times M} = \lambda \circ \bar{n}_i|_{D_+^{i-1} \times M} = \lambda \circ (j_i \times J)|_{D_+^{i-1} \times M} = \lambda \circ (j_{i-1} \times J) = \bar{\mathcal{V}}_{i-1}$ ,  
 und mit  $\bar{\mathcal{V}}_M = \bar{\mathcal{V}}_1|_{\{1\} \times M}$  ist auch (ii) und (iii) erfüllt.

Damit ist die Existenz eines Normalen- $k$ -Typs von  $M$  bewiesen.

b) Sei  $i_0 \in \mathbb{N}$  beliebig.  $B \xrightarrow{p} \text{BO}$  und  $B' \xrightarrow{p'} \text{BO}$  sind  $k$ -ter Schritt einer Postnikov-Zerlegung von  $\mathcal{V}_{D_+^i \times M}$ .  
 $([Kr_1, 1.2])$ .

Aus der Eindeutigkeit solcher Postnikov-Zerlegungen folgt,

daß es eine Faserhomotopieäquivalenz  $h = h(i_0): B \longrightarrow B'$  gibt, so daß  $h \circ \bar{v}_{i_0}$  und  $\bar{v}'_{i_0}$  homotop über  $p'$  sind.

$h$  ist durch diese Eigenschaft bis auf Homotopie über  $BO$  eindeutig bestimmt [Bau].

Da  $\bar{v}_{i_0}: D_+^{i_0} \times M \longrightarrow B$  eine Kofaserung ist, gibt es zu einer Homotopie über  $BO$   $G: I \times D_+^{i_0} \times M \longrightarrow B'$  mit  $G_0 = h \circ \bar{v}_{i_0}$  und

$G_1 = \bar{v}'_{i_0}$  eine Homotopie  $H: I \times B \longrightarrow B'$  über  $BO$

mit  $H_0 = h$  und  $H_t \circ \bar{v}_{i_0} = G_t$ . Nach dem Satz von Dold über

Faserungen ist  $H_1: B \longrightarrow B'$  eine Faserhomotopieäquivalenz,

und es gilt  $H_1 \circ \bar{v}_{i_0} = \bar{v}'_{i_0}$ . Daraus folgt für  $i \leq i_0$

$$H_1 \circ \bar{v}_i = H_1 \circ \bar{v}_{i_0}|_{D_+^i \times M} = \bar{v}'_{i_0}|_{D_+^i \times M} = \bar{v}'_i.$$

q.e.d.

### Bezeichnung:

Ist  $B \xrightarrow{P} BO$  der  $k$ -Typ von  $M$  und  $X$  eine beliebige Mannigfaltigkeit, so heißt eine  $B$ -Struktur  $\bar{v}_X: X \longrightarrow B$  ein Normalen- $k$ -Smoothing, falls  $\bar{v}_X$  eine  $(k+1)$ -Äquivalenz ist.

Als Beispiel wollen wir für eine  $(k+1)$ -parallelisierbare Mannigfaltigkeit  $M^n$  den Normalen- $k$ -Typ bestimmen.

Mit den Blockdiffeomorphismengruppen solcher Mannigfaltigkeiten werden wir uns in den Kapiteln 6 und 7 beschäftigen.

### Hilfssatz 2.3:

Ist  $M^n$  eine  $(k+1)$ -parallelisierbare Mannigfaltigkeit, so ist der Normalen- $k$ -Typ von  $M$  durch

$$P_k(M) \times BO\langle k+2 \rangle \xrightarrow{P_{k+2} \circ P_{k+2}} BO$$

gegeben. Dabei entsteht der CW-Komplex  $P_k(M)$  aus  $M$  durch Anheften

von Zellen der Dimension  $q \geq k+2$ , so daß  $\pi_q(P_k(M)) = \{0\}$  für  $q \geq k+1$  und die Inklusion  $j: M \hookrightarrow P_k(M)$  für  $q \leq k$  einen Isomorphismus  $\pi_q(M) \xrightarrow{\sim} \pi_q(P_k(M))$  liefert.

Beweis:

Wir konstruieren zunächst in geeigneter Weise das  $(k+2)$ -zusammenhängende Cover  $BO\langle k+2 \rangle$  über  $BO$ .

Dazu zeigen wir, daß es einen relativen CW-Komplex  $(B', M)$  und eine Abbildung  $p': B' \rightarrow BO$  gibt, so daß

- 1)  $\pi_q(B') = \{0\}$  für  $q \leq k+1$ ,
- 2)  $p'_*: \pi_q(B') \rightarrow \pi_q(BO)$  ein Isomorphismus für  $q \geq k+2$
- 3) und  $p'|_M = \nu_M$  gilt.

Die Konstruktion von  $B'$  geschieht in zwei Schritten.

Für jeden Erzeuger von  $\pi_q(BO)$  für  $q \geq k+2$  wählen wir eine Abbildung  $\varphi_q: S^q \rightarrow BO$ .  $\bigvee_q S^q$  ist  $(k+1)$ -zusammenhängend, und  $\bigvee_q \varphi_q: \bigvee_q S^q \rightarrow BO$  ist surjektiv auf den Homotopiegruppen der Dimension  $q \geq k+2$ . Durch Anheften von Zellen der Dimension  $q \geq k+4$  können wir einen CW-Komplex  $X$ , zusammen mit einer Abbildung  $\bar{p}': X \rightarrow BO$  konstruieren, so daß 1) und 2) erfüllt sind.

Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & M \times X & \\
 (Id, i) \nearrow & \downarrow \nu_M \times \bar{p}' & \\
 M & BO \times BO & \\
 \searrow \nu_M & \downarrow \nu & \\
 & BO & 
 \end{array}$$

( $i: M \hookrightarrow X$  Inklusion).

Durch Anheften von Zellen bis zur Dimension  $k+2$  machen wir  $M \times X$   $(k+1)$ -zusammenhängend und erhalten so einen Raum  $Y$ .

Da  $\nu_M|_{M^{(k+1)}}$  nullhomotop ist ( $M$  ist  $(k+1)$ -parallelisierbar),  
ist  $\nu^\circ(\nu_M \times \bar{p}')$  zu  $\bar{p}': Y \rightarrow BO$  fortsetzbar.

Durch weiteres Anheften von Zellen der Dimension  $q \geq k+3$   
läßt sich ein CW-Komplex  $B'$  und eine Abbildung  $p': B' \rightarrow BO$   
konstruieren, so daß 1), 2) und 3) erfüllt sind.

Die Abbildung  $S^\infty \times B' \xrightarrow{\text{Id} \times p'} BSO(1) \times BO \xrightarrow{\nu} BO$   
verwandeln wir in eine Faserung  $p = p_{\langle k+2 \rangle}: I^{\nu(\text{Id} \times p')} \rightarrow BO$   
und bezeichnen den Totalraum dieser Faserung mit  $BO\langle k+2 \rangle$ .

$P_k(M)$  sei wie in der Formulierung des Satzes gegeben.

Nach Konstruktion ist für beliebiges  $i \in \mathbb{N}$

$$\bar{\nu}_i = j \circ \text{pr}_M \times \lambda \circ (j_i \times i): D_+^i \times M \rightarrow P_k(M) \times BO\langle k+2 \rangle$$

ein  $k$ -Smoothing und eine Kofaserung, und es gilt

$$\bar{\nu}_i|_{D_+^{i-1} \times M} = \bar{\nu}_{i-1}, \text{ d.h.} \\ P_k(M) \times BO\langle k+2 \rangle \xrightarrow{P_{\langle k+2 \rangle} \circ \text{pr}_2} BO$$

ist der Normalen- $k$ -Typ von  $M$ .

q.e.d.

Für viele Fragen, die in dieser Arbeit behandelt werden,

wird es keine Rolle spielen, ob  $\bar{\nu}_i: D_+^i \times M \rightarrow BO$

eine Kofaserung ist oder nicht. Benötigt wird die

Kofaserungseigenschaft im wesentlichen in § 4, um

Normalen- $k$ -Smoothings  $D_+^i \times M \rightarrow B$ , die auf  $S^{i-1} \times M$  mit

$\bar{\nu}_i|_{S^{i-1} \times M}$  übereinstimmen, durch geeignete Faserhomotopie-  
äquivalenzen ausdrücken zu können (Hilfssatz 4.2).

Wir werden im folgenden stets annehmen, daß  $\bar{\nu}_i$  Kofaserung

ist.

Ab jetzt sei  $B \xrightarrow{p} BO$  stets der Normalen- $k$ -Typ von  $M$   
für geeignetes  $k \in \mathbb{N}$ .

Manchmal schreiben wir für  $B$  genauer  $B_k(M)$  oder  $B_k$ .

Wir wählen stets eine Familie von  $k$ -Smoothings

$(\overline{\nabla}_i: D_+^i \times M \rightarrow B)_{i \in \mathbb{N}}$  mit den Eigenschaften von Definition 2.1 fest aus.

Die Einschränkung von  $\overline{\nabla}_i$  auf  $S^{i-1} \times M = \partial D_+^i \times M$  bezeichnen wir mit  $\overline{\nabla}_i$ .

Die Mannigfaltigkeit  $D^i$  sei immer als  $D_+^i \subset \mathbb{R}_+^{i+1}$  eingebettet, versehen mit der üblichen Orientierung durch den äußeren Normalenvektor.

Es sei noch angemerkt, daß bis auf Äquivalenz von  $B$ -Strukturen

$\overline{\nabla}_i$  durch ein fest vorgegebenes Normalen- $k$ -Smoothing  $\overline{\nabla}_M = \overline{\nabla}_i|_{\{t_0\} \times M}$  und die Orientierung auf  $D_+^i$  gegeben ist.

Definition 2.4 (Relative Normalen- $k$ -Smoothings auf  $D^i \times M$ , relative  $B$ -Bordismusklassen)

Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit und für  $k \in \mathbb{N}$   $B \xrightarrow{p} B_0$  der Normalen- $k$ -Typ von  $M$ .

- i) Eine relative  $(n+i)$ -dimensionale  $B$ -Mannigfaltigkeit ist ein Tripel  $(X, \overline{\nabla}_X, f)$ , wobei
  - a)  $(X, \overline{\nabla}_X)$  eine  $(n+i)$ -dimensionale  $B$ -Mannigfaltigkeit mit Rand
  - und
  - b)  $f: \partial X \rightarrow S^{i-1} \times M$  ein Diffeomorphismus mit  $f^* \overline{\nabla}_i = \overline{\nabla}_X|_{\partial X}$  ist.

Ist zusätzlich  $M \xrightarrow{f^{-1}|_M} \partial X \hookrightarrow X$  eine einfache Homotopieäquivalenz, so heißt  $(X, \overline{\nu}_X, f)$  ein relatives Normalen-k-Smoothing auf  $D^i \times M$ . (Zur Bezeichnung: siehe 2.11)

ii) Zwei relative B-Mannigfaltigkeiten  $(X, \overline{\nu}_X, f)$  und  $(X', \overline{\nu}_{X'}, f')$  heißen äquivalent, wenn es zwischen ihnen einen B-Bordismus  $(W, \overline{\nu}_W, \overline{f})$  gibt.

Dabei ist

- a)  $W \subset \mathbb{R}^{n+i+t} \times [0, 1]$  eine Mannigfaltigkeit mit  
 $\partial W = X \cup U \cup X'$ , wobei  $X \subset \mathbb{R}^{n+i+t} \times \{0\}$ ,  $X' \subset \mathbb{R}^{n+i+t} \times \{1\}$   
 und  $U \cap \mathbb{R}^{n+i+t} \times ([0, \varepsilon] + [1-\varepsilon, 1]) = \partial X \times [0, \varepsilon] + \partial X' \times [1-\varepsilon, 1]$   
 für ein  $\varepsilon > 0$  gilt,
- b)  $\overline{\nu}_W: W \longrightarrow B$  eine B-Struktur von  $W$  mit  $\overline{\nu}_W|_X = \overline{\nu}_X$ ,  
 $\overline{\nu}_W|_{X'} = \overline{\nu}_{X'}$  und
- c)  $\overline{f}: U \longrightarrow S^{i-1} \times M \times [0, 1]$  ein Diffeomorphismus mit  
 $\overline{f}|_{\partial U} = f + f'$  und  $\overline{f}^* \overline{\nu}_1 \circ \text{pr}_{S^{i-1} \times M} = \overline{\nu}_W|_U$ .

Sind  $(X, \overline{\nu}_X, f)$  und  $(X', \overline{\nu}_{X'}, f')$  zwei relative Normalen-k-Smoothings, so heißen sie äquivalent, wenn es einen B-Bordismus  $(W, \overline{\nu}_W, \overline{f})$  zwischen ihnen gibt, so daß  $X \hookrightarrow W$  und  $X' \hookrightarrow W$  einfache Homotopieäquivalenzen sind.

Bemerkung 2.5: Die in 2.4 eingeführten Relationen sind Äquivalenzrelationen. Die Reflexivität ist klar, die Symmetrie folgt durch Spiegeln von  $(W, \overline{\nu}_W, \overline{f})$  an  $\mathbb{R}^{n+i+t} \times \{\frac{1}{2}\}$ , und die Transitivität gilt, da sich relative B-Bordismen einfach zusammensetzen lassen.

Die Menge der Äquivalenzklassen wird im Falle der relativen B-Mannigfaltigkeiten mit  $\Omega_{n+i}^{B, S^{i-1} \times M, \overline{\nu}_1}$  und im Fall der

relativen Normalen-k-Smoothings auf  $D^i \times M$  mit  $NS_k(D^i \times M; \bar{\nu}_i)$  bezeichnet.

Bemerkung 2.6:  $\Omega_{n+i}^{B, S^{i-1} \times M, \bar{\nu}_i}$  ist bereits in  $[Kr_1]$  definiert worden. Die dort definierte Bordismusrelation ist äquivalent zu der hier vorliegenden.

Gilt  $Wh(\pi_1(M)) = 0$  und  $k \geq \left\lceil \frac{n+i}{2} \right\rceil$ , so stimmt  $NS_k(D^i \times M; \bar{\nu}_i)$  mit der dort definierten Menge  $NS_{n+i, k}^{B, S^{i-1} \times M}$  überein.

Hilfssatz 2.7: Seien  $(X, \bar{\nu}_X, f)$  und  $(X', \bar{\nu}_{X'}, f')$  zwei relative Normalen-k-Smoothings, bzw. zwei relative B-Mannigfaltigkeiten.

Gibt es einen Diffeomorphismus  $h: X \rightarrow X'$  mit  $h^* \bar{\nu}_{X'} = \bar{\nu}_X$  und  $f' \circ h|_{\partial X} = f$ , so sind  $(X, \bar{\nu}_X, f)$  und  $(X', \bar{\nu}_{X'}, f')$  äquivalent.

Im Fall der relativen Normalen-k-Smoothings gilt auch die Umkehrung, falls  $n+i = \dim X \geq 5$ .

Beweis: Ist  $h: X \rightarrow X'$  ein Diffeomorphismus mit den angegebenen Eigenschaften, so liefert

$$W = X \times \left[0, \frac{1}{2}\right] + X' \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] / (x, \frac{1}{2}) \sim (h(x), \frac{1}{2})$$

einen s-Kobordismus zwischen  $X$  und  $X'$ ;

$(\bar{\nu}_X \circ \text{Pr}_X + \bar{\nu}_{X'} \circ \text{Pr}_{X'}) : X \times \left[0, \frac{1}{2}\right] + X' \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] \rightarrow B$  induziert wegen  $h^* \bar{\nu}_{X'} = \bar{\nu}_X$  eine B-Struktur auf  $W$ ;

$$\bar{F} = (f \times \text{Id}_{\left[0, \frac{1}{2}\right]} \cup f' \times \text{Id}_{\left[\frac{1}{2}, 1\right]}) : X \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup_{h|_X} X' \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] \longrightarrow S^{i-1} \times M \times [0, 1]$$

ist dann ein Diffeomorphismus mit  $\bar{F}^* \bar{\nu}_i \circ \text{pr}_{S^{i-1} \times M} = \bar{\nu}_W|_U$ ,

$$U = \partial X \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup_{f|_X} X' \times \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Also sind  $(X, \bar{\nu}_X, f)$  und  $(X', \bar{\nu}_{X'}, f')$  äquivalent.

Seien umgekehrt  $(X, \bar{\nabla}_X, f)$  und  $(X', \bar{\nabla}_{X'}, f')$  zwei relative Normalen-k-Smoothings,  $\dim X \geq 5$ , und  $(W, \bar{\nabla}_W, \bar{f})$  ein relativer s-Kobordismus zwischen diesen k-Smoothings.

Wegen  $\dim X \geq 5$  gibt es nach dem relativen s-Kobordismussatz einen Diffeomorphismus  $H: X \times [0, 1] \rightarrow W$  mit  $H|_{X \times \{0\}} = \text{Id}$ , und  $H|_{\partial X \times [0, 1]} = \bar{f}^{-1} \circ (f \times \text{Id}_{[0, 1]})$ . Dann ist  $h = H|_{X \times \{1\}}: X \rightarrow X'$  ein Diffeomorphismus, der  $f'^{-1} \circ f: \partial X \rightarrow \partial X'$  fortsetzt. Außerdem ist  $H^* \bar{\nabla}_W: X \times [0, 1] \rightarrow B$  eine Homotopie von Liften zwischen  $\bar{\nabla}_X$  und  $h^* \bar{\nabla}_{X'}$ , d.h.  $\bar{\nabla}_X$  und  $h^* \bar{\nabla}_{X'}$  sind äquivalent.

Ferner gilt  $f' \circ h|_{\partial X} = f$ , d.h.  $h$  hat die gesuchten Eigenschaften.

q.e.d.

## 2.8: Verknüpfung auf $\text{NS}_k(D^i \times M; \bar{\nabla}_i)$ und $\Omega_{n+1}^{B, S^{i-1} \times M, \bar{\nabla}_i}$

Sei für  $i \geq 2$   $\bar{D}^{i-1} \hookrightarrow S^{i-1} = \partial D^i$  eine beliebige, orientierungserhaltend eingebettete Scheibe und  $s = s' \times \text{Id}: \bar{D}^{i-1} \times M \rightarrow \bar{D}^{i-1} \times M$  ein durch Spiegeln auf  $\bar{D}^{i-1}$  gegebener orientierungsumkehrender Diffeomorphismus. Für  $i = 1$  sei  $\bar{D}^0 = \{1\} \subset S^0 = \{-1, 1\}$  und  $s': \{1\} \rightarrow \{-1\}$  die Vertauschung der Elemente von  $S^0$ . Sind  $\mathcal{A} = (X, \bar{\nabla}_X, f)$  und  $\mathcal{A}' = (X', \bar{\nabla}_{X'}, f')$  zwei relative Normalen-k-Smoothings auf  $D^i \times M$ , bzw. relative B-Mannigfaltigkeiten, so sei

$$\bar{U} = f^{-1}(\bar{D}^{i-1} \times M) \text{ und } \bar{U}' = f'^{-1}(\bar{D}^{i-1} \times M).$$

Dann ist  $f'^{-1} \circ s \circ f|_{\bar{U}}: \bar{U} \rightarrow \bar{U}'$  ein Diffeomorphismus mit  $(f'^{-1} \circ s \circ f)^* \bar{\nabla}_{X'}|_{\bar{U}} = s^* \bar{\nabla}_X|_{\bar{U}}$ .

Deshalb induziert  $\bar{\nabla}_X \cup \bar{\nabla}_{X'}$  eine B-Struktur auf

$$X \cup_{f'^{-1} \circ s \circ f|_{\bar{U}}} X' = \tilde{X}.$$

Es gilt  $\partial(X \cup_{f'^{-1} \circ s \circ f|_{\bar{U}}} X') = (\partial X - \bar{U}) \cup_{f'^{-1} \circ s \circ f|_{\bar{U}}} (\partial X' - \bar{U}')$  und  $f \cup f'$  induziert einen Diffeomorphismus

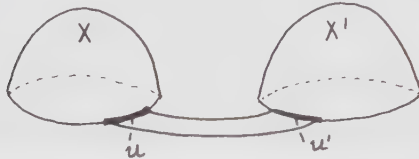
$$(\partial X - \bar{U}) \cup_{f'^{-1} \circ s \circ f|_{\bar{U}}} (\partial X' - \bar{U}') \longrightarrow (S^{i-1} \setminus \bar{D}^{i-1}) \times M \cup_{s|_{\bar{D}^{i-1} \times M}} (S^{i-1} \setminus \bar{D}^{i-1}) \times M.$$

Identifiziert man  $(S^{i-1} \setminus \bar{D}^{i-1}) \cup_{\mathcal{S}} (S^{i-1} \setminus \bar{D}^{i-1})$  mit

$D_+^{i-1} \cup D_-^{i-1} = S^{i-1}$ , so erhält man einen Diffeomorphismus

$[f \cup f'] : \partial \tilde{X} \longrightarrow S^{i-1} \times M$  mit  $[f \cup f']^* \bar{\nabla}_i = (\bar{\nabla}_X \cup \bar{\nabla}_{X'})|_{\partial \tilde{X}}$ .

Wir definieren  $\mathcal{A} \circ \mathcal{A}' = (X \cup_{f^{-1} \circ s \circ f / u} X', \bar{\nabla}_X \cup \bar{\nabla}_{X'}, [f \cup f'])$ .



Begründung: Da im Fall der relativen Normalen-k-Smoothings

$M \xrightarrow{f^{-1}|_{\{t_0\}}} X \xrightarrow{\mathcal{A}} M$  und  $M \xrightarrow{f'^{-1}|_{\{t_0\}}} X' \xrightarrow{\mathcal{A}'} M$

einfache Homotopieäquivalenzen sind und  $X$  und  $X'$  längs einer

zu  $\bar{D}^{i-1} \times M$  diffeomorphen Mannigfaltigkeit verklebt werden,

ist  $M \longrightarrow \tilde{X}$  wieder eine einfache Homotopieäquivalenz.

Die Eigenschaft  $(\bar{\nabla}_X \cup \bar{\nabla}_{X'})|_{\partial \tilde{X}} = [f \cup f']^* \bar{\nabla}_i$  folgt wegen

der speziellen Wahl der B-Struktur  $\bar{\nabla}_i$ . Ist nämlich

$\varphi : (S^{i-1} \setminus \bar{D}^{i-1}) \cup_{\mathcal{S}} (S^{i-1} \setminus \bar{D}^{i-1}) \longrightarrow D_+^{i-1} \cup D_-^{i-1} = S^{i-1}$

ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus, so ist

$\varphi \times \text{Id}_M$  ein Diffeomorphismus, der  $\bar{\nabla}_i$  respektiert, da  $\bar{\nabla}_i$

bis auf Äquivalenz von B-Strukturen durch  $\bar{\nabla}_M$  und  $\bar{\nabla}_i|_{D_+^{i-1} \times \{t_0\}}$

bestimmt ist und  $\bar{\nabla}_i|_{D_+^{i-1} \times \{t_0\}}$  durch die Orientierung auf  $D_+^{i-1}$  gegeben ist

Satz 2.9: Die in 2.8. beschriebene Konstruktion ist unabhängig

von der Wahl der Repräsentanten und der Wahl der eingebetteten

Scheibe  $\bar{D}^{i-1}$ . Sie liefert eine assoziative Verknüpfung auf

$NS_k(D^i \times M; \bar{\nabla}_i)$ , bzw.  $\Omega_{n+i}^{B, S^{i-1} \times M, \bar{\nabla}_i}$ .

Beweis: a) Sei  $(V, \bar{\nabla}_V, \bar{f})$  ein s-Kobordismus zwischen

$\mathcal{A}_1 = (X, \bar{\nabla}_X, f)$  und  $\mathcal{A}'_1 = (X', \bar{\nabla}_{X'}, f')$  und  $(W, \bar{\nabla}_W, \bar{g})$

ein s-Kobordismus zwischen  $\mathcal{A}_2 = (Y, \bar{\nabla}_Y, g)$  und

$\mathcal{A}'_2 = (Y', \bar{\nabla}_{Y'}, g')$ . Dann ist

$(V \cup \bar{g}^{-1} \circ (S \times \text{id}_1) \circ \bar{f} \mid \bar{f}^{-1}(\bar{D}^{i-1} \times M \times 1)) \cup W, \nabla_V \cup \nabla_W, \bar{F} \cup \bar{g})$

ein s-Kobordismus zwischen  $\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{S}_2$  und  $\mathcal{S}_1' \circ \mathcal{S}_2'$ .

b) Die Unabhängigkeit der Verknüpfung von der Wahl der eingebetteten Scheibe folgt aus dem Disk-Lemma:

Seien  $\bar{D}^{i-1} \subset S^{i-1}$  und  $\tilde{D}^{i-1} \subset S^{i-1}$  zwei orientierungserhaltend eingebettete Scheiben. Dann gibt es eine Diffeotopie

$H: S^{i-1} \times I \longrightarrow S^{i-1}$  mit  $H_0 = \text{Id}$  und  $H_1(\bar{D}^{i-1}) = \tilde{D}^{i-1}$ .

Dann sind  $f$  und  $(H_1 \times \text{Id}_M) \circ f$  isotop, ebenso  $g$  und  $(H_1 \times \text{Id}_M) \circ g$ .

Also gilt  $\mathcal{S}_1 = (X, \nabla_X, f) \sim (X, \nabla_X, (H_1 \times \text{Id}_M) \circ f) = \mathcal{S}_1'$

und  $\mathcal{S}_2 = (Y, \nabla_Y, g) \sim (Y, \nabla_Y, (H_1 \times \text{Id}_M) \circ g) = \mathcal{S}_2'$ .

Die Verknüpfung bezüglich  $\tilde{D}^{i-1}$  zeigt zusammen mit a) die Unabhängigkeit von der gewählten Scheibe.

c) Zur Assoziativität der Verknüpfung:

Seien  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$  3 Normalen-k-Smoothings von  $D^i \times M$  und  $i \geq 2$ . Wir wählen zwei eingebettete, disjunkte Scheiben

$D_1^{i-1} \subset S^{i-1}$  und  $D_2^{i-1} \subset S^{i-1}$  und bilden die Verknüpfung von  $\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{S}_2$  mittels  $D_1^{i-1}$  und zwischen  $\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{S}_2$  und  $\mathcal{S}_3$  mittels  $D_2^{i-1}$ .

Dann läßt sich  $\mathcal{S}_1 \circ (\mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_3)$  durch dieselbe B-Mannigfaltigkeit repräsentieren, d.h. die Verknüpfung ist assoziativ.



Die Verknüpfung für  $i = 1$  ist das Zusammensetzen von s-Kobordismen und ist ebenfalls assoziativ.

Der Beweis für  $\Omega_{n+i}^{B, S^{i-1} \times M, \bar{\nabla}_i}$  ist analog.

q.e.d.

Hilfssatz 2.10:  $NS_k(D^{i-xM}, \overline{\nabla}_i)$  und  $\Omega_{n+i}^{B, S^{i-1-xM}, \overline{\nabla}_i}$   
sind für  $i \geq 2$  abelsch.

Beweis: Seien  $(X, \overline{\nabla}_X, f)$  und  $(X', \overline{\nabla}_{X'}, f')$  zwei relative  
Normalen-k-Smoothings, bzw. zwei relative B-Mannigfaltigkeiten.  
Die Vertauschung induziert einen Diffeomorphismus

$$T: X \cup_{f^{-1} \circ f|_{\overline{\nabla}_X}} X' \longrightarrow X' \cup_{f' \circ f|_{\overline{\nabla}_{X'}}} X.$$

Es gilt  $T^*(\overline{\nabla}_X \cup \overline{\nabla}_{X'}) = \overline{\nabla}_X \cup \overline{\nabla}_{X'}$ , und  $(f' \circ f) \circ T|_{X \cup X'} = f \circ f'$ .

Also ist nach Hilfssatz 2.7 die Verknüpfung unabhängig  
von der Reihenfolge. q.e.d.

Um zeigen zu können, daß  $[D^{i-xM}, \overline{\nabla}_i, Id]$  neutrales Element  
der Verknüpfung auf  $NS_k(D^{i-xM}; \overline{\nabla}_i)$  ist, beweisen wir  
zunächst einen Hilfssatz über die Darstellung eines  
Normalen-k-Smoothings in Normalform.

Hilfssatz 2.11: Sei  $n+i \geq 6$ .

Jedes relative Normalen-k-Smoothing von  $D^{i-xM}$  läßt sich  
in der Form  $(D^{i-xM}, \overline{\nabla}, f)$  repräsentieren, wobei  
 $f: S^{i-1-xM} \longrightarrow S^{i-1-xM}$  ein Diffeomorphismus mit  $f|_{D^{i-1-xM}} = Id$  ist.

Beweis:

Ist  $(X, \overline{\nabla}_X, f)$  ein beliebiges relatives Normalen-k-Smoothing  
auf  $D^{i-xM}$  und ist  $H: D^{i-xM} \longrightarrow X$  ein Diffeomorphismus  
mit  $H|_{D^{i-1-xM}} = f^{-1}$ , so ist nach Hilfssatz 2.7  
 $(D^{i-xM}, H^* \overline{\nabla}_X, f \circ H|_{S^{i-1-xM}})$  äquivalent zu  $(X, \overline{\nabla}_X, f)$  und hat die  
gewünschten speziellen Eigenschaften.

Daß man den Diffeomorphismus  $H$  wie angegeben wählen kann,  
sieht man folgendermaßen: Nach dem relativen s-Kobordismus-  
Satz gibt es einen Diffeomorphismus  $H': X \longrightarrow U_- \times I$   
mit  $H'|_{U_-} = Id: U_- \longrightarrow U_- \times \{0\}$  ( $U_- = f^{-1}(D^{i-1-xM})$ )

Analog gibt es einen Diffeomorphismus  $G: D_+^i \times M \longrightarrow D_-^{i-1} \times M \times I$

mit  $G|_{D_-^{i-1} \times M} = \text{Id}$ . Die Komposition

$$H: D_+^i \times M \xrightarrow{G} D_-^{i-1} \times M \times I \xrightarrow{f^{-1} \times \text{Id}} U_- \times I \xrightarrow{H'^{-1}} X$$

hat die Eigenschaft  $H|_{D_-^{i-1} \times M} = f^{-1}$ .

q.e.d.

Satz 2.12: Sei  $n+i \geq 6$ .

$\text{NS}_k(D_+^i \times M; \overline{\mathcal{V}}_i)$  ist mit der eingeführten Verknüpfung eine

Halbgruppe mit neutralem Element  $\mathcal{A}_e = (D_+^i \times M, \overline{\mathcal{V}}_i, \text{Id})$ .

Diese Halbgruppe ist für  $i \geq 2$  abelsch.

Beweis:

Es ist nur noch zu zeigen, daß  $(D_+^i \times M, \overline{\mathcal{V}}_i, \text{Id})$  neutrales Element ist. Die restlichen Eigenschaften folgen aus

2.8 bis 2.10.

Jedes relative Normalen-k-Smoothing von  $D_+^i \times M \hookrightarrow$  läßt sich nach Hilfssatz 2.11 in der Form  $(D_+^i \times M, \overline{\mathcal{V}}, f)$  mit  $f|_{D_-^{i-1} \times M} = \text{Id}$  repräsentieren.

Wir wählen zur Bestimmung von  $\mathcal{A} \circ \mathcal{A}_e$  als eingebettete Scheiben  $\overline{D}^{i-1} = D_-^{i-1} \subset S^{i-1}$ . Dann ist  $\overline{U} = D_-^{i-1} \times M = \overline{U}'$  und es gilt

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{A}_e = (D_+^i \times M \cup_S |_{D_-^{i-1} \times M} D_+^i \times M, \overline{\mathcal{V}} \cup \overline{\mathcal{V}}_i; f|_{D_+^i \times M} \cup \text{Id}_{D_-^{i-1} \times M}).$$

Dieses k-Smoothing ist äquivalent zu

$$(D_+^i \times M, \overline{\mathcal{V}} \cup \overline{\mathcal{V}}_i, f):$$

Sei  $i: D_+^i \longrightarrow D_+^i$  eine Einbettung mit  $i|_{D_+^{i-1}} = \text{Id}$  und  $i|_{D_-^{i-1}}: D_-^{i-1} \xrightarrow{\cong} \overline{D}^{i-1}$ .  $i$  ist isotop relativ  $D_+^{i-1}$  zur Identität. Sei  $F$  solch eine Isotopie und

$$\overline{F} = F \times \text{Id}_M: I \times D_+^i \times M \longrightarrow D_+^i \times M. \text{ Dann ist}$$

$(I \times D_+^i \times M, F^*(\overline{\nu} \cup \overline{\nu}_i), Id_I \times f)$  ein s-Kobordismus zwischen  $(D_+^i \times M, \overline{\nu} \cup \overline{\nu}_i, f)$  und  $(D_+^i \times M, \overline{\nu}, f)$ , d.h.  $\mathcal{J} \circ \mathcal{J}_e = \mathcal{J}$ .

Die Beziehung  $\mathcal{J}_e \circ \mathcal{J} = \mathcal{J}$  folgt analog.

q.e.d.

Bemerkung 2.13:

$NS_k(D_+^i \times M; \overline{\nu}_i)$  ist mit der eingeführten Verknüpfung sogar eine Gruppe. Das soll nicht direkt bewiesen werden, da diese Behauptung unmittelbar aus den exakten Sequenzen folgt, die in § 3 und in § 4 hergeleitet werden.

Daß  $\Omega_{n+1}^{B, S^{i-1} \times M, \overline{\nu}_i}$  eine abelsche Gruppe ist, folgt aus Hilfssatz 3.6.

### § 3 Die Surgery-Sequenz für relative Normalen- -k-Smoothings auf $D^i \times M$

Ziel dieses Paragraphen ist die Aufstellung einer exakten Sequenz zur Bestimmung von  $NS_k(D^i \times M; \bar{\nu}_i)$ .

Der Unterschied zwischen den relativen Normalen-k-Smoothings und  $\Omega_{n+i}^{B, S^{i-1} \times M, \bar{\nu}_i}$  kann für  $k \geq \left[ \frac{n+i-1}{2} \right]$  mit Hilfe von Surgery-Theorie bestimmt werden. Außerdem wird gezeigt, daß  $\Omega_{n+i}^{B, S^{i-1} \times M, \bar{\nu}_i}$  isomorph zur Bordismusgruppe geschlossener  $(n+i)$ -dimensionaler B-Mannigfaltigkeiten ist.

Wir haben einen Homomorphismus

$$\eta : NS_k(D^i \times M; \bar{\nu}_i) \longrightarrow \Omega_{n+i}^{B, S^{i-1} \times M, \bar{\nu}_i},$$

indem wir ein k-Smoothing  $(X, \bar{\nu}_X, f)$  als B-Mannigfaltigkeit auffassen.

Als erstes soll Bild  $\eta$  bestimmt werden, falls  $k \geq \left[ \frac{n+i-1}{2} \right]$ .

Ist  $n+i$  ungerade, so läßt sich in gewissen Fällen das

Bild von  $\eta$  auch für  $k = \frac{n+i-3}{2}$  bestimmen.

Dazu wird eine Surgery-Invariante zur Realisierung von

B-Bordismusklassen durch Elemente aus  $NS_k(D^i \times M; \bar{\nu}_i)$  definiert.

Die an dieser Stelle zu verwendenden Surgery-Hindernisgruppen

sollen kurz erläutert werden. Eine ausführliche Darstellung

mit den genauen Definitionen findet man in [Kr<sub>1</sub>], § 4.

Sei  $\pi = \pi_1(M)$ ,  $\Lambda = \mathbb{Z}\pi$  und  $w_1: \pi \longrightarrow \mathbb{Z}_2$  ein Homomorphismus.

Mit  $L_m^S(\pi, w_1)$  werden die Surgery-Gruppen von Wall bezeichnet [Wa].

Ist  $m$  gerade, so werden die Elemente von  $L_m^S(\pi, w_1)$  durch spezielle hermite'sche Formen  $(V, \lambda, \mu)$  repräsentiert.

Insbesondere ist  $V$  frei mit ausgezeichnetener Basis, und die

Adjungierte zu  $\lambda$ ,  $\text{Ad}_\lambda : V \longrightarrow \text{Hom}_\Lambda(V, \Lambda)$  ist ein einfacher Isomorphismus.

Läßt man für die quadratische Form  $\nu$  Werte in  $\Lambda/S$  zu, so erhält man die Gruppe  $L_m^S(\pi, S, w_1)$ .

Dabei ist  $S \subset \Lambda$  eine Untergruppe, die  $\{b - (-1)^{\frac{m}{2}} \bar{b} \mid b \in \Lambda\}$  enthält, so daß für  $a \in S$   $a + (-1)^{\frac{m}{2}} \bar{a} = 0$

und für  $a \in S$  und beliebiges  $b \in \Lambda$   $b \cdot a \cdot \bar{b} \in S$  gilt.

Gilt  $S = \{b - (-1)^{\frac{m}{2}} \bar{b} \mid b \in \Lambda\}$ , so nennen wir  $S$  minimal.

Oft wird  $S = S(D^i \times M)$  die Untergruppe von  $\Lambda$  sein, die von den Selbstschnittzahlen immensiozierter Sphären  $S^{\frac{m}{2}} \xrightarrow{\quad} D_+^i \times M^{m-i}$  aus Kern  $(\pi_{\frac{m}{2}}(D_+^i \times M) \xrightarrow{\bar{\nu}_i} \pi_{\frac{m}{2}}(B))$  erzeugt wird.

Verlangt man nicht mehr, daß die Adjungierte zu  $\lambda$  ein einfacher Isomorphismus ist, so erhält man aus den Tripeln  $(V, \lambda, \nu)$  die Surgery-Gruppen  $L_m^{S, \tau}(\pi, w_1)$ , bzw.  $L_m^{S, \tau}(\pi, S, w_1)$ . Den Zusammenhang zwischen den Surgery-Hindernisgruppen stellt Lemma 4.1 aus [Kr<sub>1</sub>] her, das hier zitiert werden soll.

### Hilfssatz 3.1:

Sei  $\text{Wh}(\pi)$  die Whitehead-Gruppe von  $\pi$ .

Dann gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow L_{2n}^S(\pi, w_1) \longrightarrow L_{2n}^{S, \tau}(\pi, w_1) \xrightarrow{\tau} \text{Wh}(\pi),$$

und  $L_{2n}^{S, \tau}(\pi, w_1) \longrightarrow L_{2n}^{S, \tau}(\pi, S, w_1)$  ist surjektiv.

$\tau$  bildet  $(V, \lambda, \nu)$  auf die Whitehead-Torsion der Adjungierten von  $\lambda$  ab.

Beweis: [Kr<sub>1</sub>], Lemma 4.1.

Die Surgery-Hindernisgruppen für ungerades  $m$  ( $= 2n+1$ ) werden mit Hilfe von Formationen gebildet, d.h. von Tripeln  $((M, \lambda, \nu), F, G)$ , wobei  $(M, \lambda, \nu)$  eine nichtsinguläre  $(-1)^n$ -hermite'sche freie Form mit Werten in  $\Lambda$  und  $F, G \subset M$  freie direkte Summanden mit  $F = F^\perp$  und  $G = G^\perp$ , s.d.  $\nu$  auf  $F$  und  $G$  verschwindet.

Hat  $F' \subset M$  dieselben Eigenschaften wie  $F$  und gilt  $F \oplus F' = M$ , so induziert die Adjungierte zu  $\lambda$  einen Isomorphismus  $F \longrightarrow (F')^*$ . Ist  $F$  mit einer ausgezeichneten Basis versehen, so erhält man durch diesen Isomorphismus eine Basis von  $(F')^*$ , und indem man zur dualen Basis übergeht, eine Basis von  $F'$ . Wegen  $M = F \oplus F'$  erhält man auf diese Weise mittels  $\lambda$  aus einer ausgezeichneten Basis von  $F$  eine ausgezeichnete Basis von  $M$ .

Seien auf  $M, F$  und  $G$  Basen ausgezeichnet.

Eine schwach gebaste Formation  $((M, \lambda, \nu), F, G)$  ist eine Formation, so daß die von  $F$  mittels  $\lambda$  induzierte Basis auf  $M$  mit der ausgezeichneten Basis von  $M$  übereinstimmt.

Die Formation heißt gebast, wenn das auch für  $G$  gilt.

$L_{2n+1}^{S, \mathbb{Z}}(\pi, w_1)$  ist die Gruppe der Äquivalenzklassen solcher schwach gebaster  $(-1)^n$ -Formationen. Verwendet man gebaste Formationen, so erhält man  $L_{2n+1}^S(\pi, w_1)$ .

Die genaue Äquivalenzrelation für diese Formationen und die Darstellung dieser Gruppen durch Matrizen findet man in  $[Kr_1]$ .

Von dort soll noch folgender Hilfssatz hier aufgeführt werden.

### Hilfssatz 3.2:

Sei  $Wh(\pi)$  die Whitehead-Gruppe von  $\pi$ .

Es gibt eine exakte Sequenz abelscher Gruppen

$$0 \longrightarrow L_{2n+1}^S(\pi, w_1) \longrightarrow L_{2n+1}^{S, \tau}(\pi, w_1) \xrightarrow{\tau} Wh(\pi).$$

$\tau$  bildet  $((M, \lambda, \mu), F, G)$  auf die Whiteheadtorsion der Transformationsmatrix zwischen der ausgezeichneten Basis auf  $M$  und der von  $G$  auf  $M$  mittels  $\lambda$  induzierten Basis ab.

Beweis: Der Beweis folgt aus Lemma 4.5 in  $[Kr_1]$ .

Um bei der Formulierung der Hauptergebnisse dieses Kapitels Fallunterscheidungen möglichst zu vermeiden, soll folgende Notation für L-Gruppen eingeführt werden.

### Definition 3.3:

Sei  $M^n$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit  $\pi_1(M) = \pi$  und  $w_1(M) = w_1$ .

Falls  $n+i = 6$  oder  $n+i = 14$ , so sei für  $\alpha \in \pi_{\frac{n+i}{2}+1}(B)$

$$\langle w_{\frac{n+i}{2}+1}(\bar{\gamma}), \alpha * [S^{\frac{n+i}{2}+1}] \rangle = 0 \quad (\bar{\gamma} \longrightarrow B \text{ das universelle Bündel über } B).$$

Wir definieren dann für  $i \geq 2$

$$L_{i,n}^{(k)}(M) = \begin{cases} L_{i+n}^S(\pi, S(D^i \times M), w_1), & \text{falls } n+i \text{ gerade und} \\ & k = \frac{n+i}{2} - 1 \\ L_{i+n}^S(\pi, w_1) & \text{sonst} \end{cases}$$

und für  $i = 1$

$$L_{1,n}^{(k)}(M) = \begin{cases} L_{n+1}^{S, \tau}(\pi, S(D^1 \times M), w_1), & \text{falls } n+1 \text{ gerade und} \\ & k = \frac{n+1}{2} - 1 \\ L_{n+1}^{S, \tau}(\pi, w_1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei nun  $n+i = 6$  oder  $n+i = 14$  und es gebe ein  $\alpha \in \pi_{\frac{n+i}{2}+1}^{(B)}$  mit  $\langle w_{\frac{n+i}{2}+1}(\bar{\gamma}), \alpha * [S^{\frac{n+i}{2}+1}] \rangle \neq 0$ .

Wir definieren als  $S_e$  die Untergruppe von  $\Lambda$ , die von den Elementen  $\{x + \bar{x} \mid x \in \pi\}$  und vom neutralen Element  $e \in \pi$  erzeugt wird und als  $S_e(D^i \times M)$  die Untergruppe von  $\Lambda$ , die von  $S_e$  und  $S(D^i \times M)$  erzeugt wird.

Wir definieren dann für  $i \geq 2$

$$L_{i,n}^{(k)}(M) = \begin{cases} L_{i+n}^S(\pi, S_e(D^i \times M), w_1), & \text{falls } k = \frac{n+i}{2} - 1 \\ L_{i+n}^S(\pi, S_e, w_1) & \text{sonst} \end{cases}$$

und für  $i = 1$

$$L_{1,n}^{(k)}(M) = \begin{cases} L_{n+1}^{S,\tau}(\pi, S_e(D^1 \times M), w_1), & \text{falls } k = \frac{n+1}{2} - 1 \\ L_{n+1}^{S,\tau}(\pi, S_e, w_1) & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung: Für  $n+i$  gerade läßt sich  $L_{i,n}^{(k)}(M)$  für  $i \geq 2$  stets in der Form  $L_{i,n}^{(k)}(M) = L_{i+n}^S(\pi, S_{i,n}^{(k)}(M), w_1)$  darstellen und  $L_{1,n}^{(k)}(M)$  in der Form  $L_{1,k}^{(k)}(M) = L_{n+1}^{S,\tau}(\pi, S_{i,n}^{(k)}(M), w_1)$ , wobei  $S_{i,n}^{(k)}(M) \subset \Lambda$  eine geeignete Untergruppe ist.

Satz 3.4: Sei  $i+n \geq 5$ ,  $k \geq \left\lfloor \frac{n+i}{2} \right\rfloor - 1$  und  $B \rightarrow B_0$  der  $k$ -Typ von  $M$ .

Ist  $i+n = 2m+1$  ungerade,  $m \neq 3, 7$  und  $k = m-1$ , so sei stets  $i \geq 2$  und  $S(D^{i-1} \times M)$  minimal. Ist  $m = 3, 7$  und  $k = m-1$ , so sei zusätzlich für alle  $\alpha \in \pi_{m+1}^{(B)} \langle w_{m+1}(\bar{\gamma}), \alpha * [S^{m+1}] \rangle = 0$ .

Dann gibt es eine Abbildung

$$\Theta: \Omega_{n+i}^{B, S^{i-1} \times M, \bar{\nu}_i} \longrightarrow L_{i,n}^{(k)}(M)$$

mit Kern  $\Theta = \text{Bild}(\eta : NS_k(D^i \times M; \bar{\nu}_i) \longrightarrow \Omega_{n+i}^{B, S^{i-1} \times M, \bar{\nu}_i})$ .

Ist  $k \geq \left\lfloor \frac{n+i-1}{2} \right\rfloor$ , so ist  $\Theta$  ein Homomorphismus.

Beweis: Sei  $(X, \bar{\nu}_X, f)$  eine relative  $B$ -Mannigfaltigkeit.

Mit  $U_+$  soll  $f^{-1}(D_+^{i-1} \times M)$  und mit  $U_-$   $f^{-1}(D_-^{i-1} \times M)$  bezeichnet werden, falls  $i \geq 2$  ist.

Für  $i = 1$  sei  $U_+ = f^{-1}(\{1\} \times M)$  und  $U_- = f^{-1}(\{-1\} \times M)$ .

Wegen  $\nabla_X|_{\partial X} = f^* \nabla_i$  sind  $\nabla_X|_{U_+} : U_+ \longrightarrow B$  und  $\nabla_X|_{U_-} : U_- \longrightarrow B$   $k$ -Smoothings, und  $(X, \nabla_X)$  kann als  $B$ -Bordismus zwischen  $(U_+, \nabla_X|_{U_+})$  und  $(U_-, \nabla_X|_{U_-})$  aufgefaßt werden.

In  $[Kr_1]$  ist untersucht worden, wann  $\nabla_X : X \longrightarrow B$   $B$ -bordant relativ Rand zu einem  $s$ -Kobordismus ist.

Es gibt dafür ein Surgery-Hindernis in  $L_{n+i}^{S, \mathbb{Z}}(\mathfrak{M}, w_1)$ , bzw.  $L_{n+i}^{S, \mathbb{Z}}(\mathfrak{M}, S, w_1)$  für geeignetes  $S$  ( $= S_{i,n}^{(k)}(M)$ ).

Sei  $\Theta(X, \nabla_X, f)$  dieses Hindernis.

Wegen der speziellen geometrischen Situation liegt dieses Surgery-Hindernis bereits in  $L_{i,n}^{(k)}(M)$ . Um das zu begründen, sind zahlreiche Fallunterscheidungen notwendig.

1. Fall:  $i+n = 2m$  gerade,  $k \geq m-1$ .

a) Definition der Surgery-Invariante:

Sei  $(X, \nabla_X, f)$  eine relative  $B$ -Mannigfaltigkeit. Durch Surgeries, die mit der  $B$ -Struktur verträglich sind, wird  $\pi_q(X, U_+)$  und  $\pi_q(X, U_-)$  für  $q \leq m-1$  getötet.

Sei  $K\pi_m(X)$  der Kern von  $(\nabla_X)_* : \pi_m(X) \longrightarrow \pi_m(B)$  und

$K\pi_m(U_{\pm}) = \text{Kern}(\nabla_X|_{U_{\pm}})_* : \pi_m(U_{\pm}) \longrightarrow \pi_m(B)$ .

Da  $\pi_m(U_{\pm}) \longrightarrow \pi_m(B)$  jeweils surjektiv ist, bekommt man exakte Sequenzen

$$K\pi_m(U_+) \xrightarrow{j_+} K\pi_m(X) \xrightarrow{j_+} H_m(X, U_+, \Lambda) \longrightarrow 0$$

$$K\pi_m(U_-) \xrightarrow{j_-} K\pi_m(X) \xrightarrow{j_-} H_m(X, U_-, \Lambda) \longrightarrow 0,$$

wobei  $j_{\pm}$  jeweils durch  $K\pi_m(X) \subset \pi_m(X) \longrightarrow \pi_m(X, U_{\pm})$   
 $\xrightarrow{\cong} H_m(X, U_{\pm}, \Lambda)$

gegeben ist.

$H_m(X, U_{\pm}, \Lambda)$  ist die einige nichtverschwindende Homologiegruppe von  $(X, U_{\pm})$ . Nach Stabilisieren von  $X$  mit  $r$  ( $S^m \times S^m$ )

können wir annehmen, daß  $H_m(X, U_+; \Lambda)$  frei ist. Dann wird auf

$$K\pi_m(X)/_{i_+} K\pi_m(U_+) \xrightarrow{j_+^!} H_m(X, U_+; \Lambda)$$

eine Basis dadurch ausgezeichnet, daß die Whitehead-Torsion von  $(X, U_+)$  verschwindet.

Auf  $\pi_{m+1}(B, X)$  ist die Schnittform  $\lambda$  und die Selbstschnittzahl  $\mu$  definiert.

Ist  $m \neq 3, 7$ , bzw.  $m = 3, 7$  und für alle  $\alpha \in \pi_{m+1}(B)$

$\langle w_{m+1}(\bar{y}), \alpha_*[S^{m+1}] \rangle = 0$ , so folgt, daß  $(\lambda, \mu)$  auf  $K\pi_m(X)$  definiert ist (Vgl. [Kr<sub>1</sub>, Seite 50]).

Ferner gilt

$$\text{Bild}(K\pi_m(U_+) \rightarrow K\pi_m(X)) = \text{Bild}(K\pi_m(U_-) \rightarrow K\pi_m(X)).$$

Den Quotienten von  $K\pi_m(X)$  durch dieses Bild bezeichnen wir mit  $\bar{K}_m(X, \bar{\nu}_X)$ .

Die Schnittform  $\lambda$  induziert eine unimodulare  $\Lambda$ -wertige hermite'sche Form  $\bar{\lambda}$  auf  $\bar{K}_m(X, \bar{\nu}_X)$  und  $\mu$  eine zugehörige quadratische Form  $\bar{\mu}$  mit Werten in  $\Lambda/S$ ,

wobei  $S = S(D^i \times M) = \mu(K\pi_m(U_+))$ , falls  $k = m-1$ ,

und  $S$  minimal, falls  $k \geq m$ , da dann  $K\pi_m(U_+) = \{0\}$ .

$(\bar{K}_m(X, \bar{\nu}_X), \bar{\lambda}, \bar{\mu})$  ist  $(\Lambda, S)$ -wertige hermite'sche Form auf

einem freien endlich erzeugten  $\Lambda$ -Modul mit ausgezeichnete Basis, d.h. dieses Tripel repräsentiert ein Element

$\Theta(X, \bar{\nu}_X, f)$  in  $L_{2m}^{S, \tau}(\pi, S(D^i \times M), w_1)$ , falls  $k = m-1$

und in  $L_{2m}^{S, \tau}(\pi, w_1)$ , falls  $k \geq m$ .

Ist  $m = 3, 7$  und gibt es ein  $\alpha \in \pi_{m+1}(B)$ , so daß

$\langle w_{m+1}(\bar{y}), \alpha_*[S^{m+1}] \rangle \neq 0$ , so erhält man analog

ebenfalls eine  $(\Lambda, S)$ -wertige Form  $(\bar{K}_m(X, \bar{\nu}_X), \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ ,

wobei jetzt  $S = S_e(D^i \times M)$ , falls  $k = m-1$  und  $S = S_e$ , falls

$k \geq m$ .

In diesem Fall repräsentiert  $(\overline{K}_m(X, \overline{\mathcal{V}}_X), \overline{\lambda}, \overline{\rho})$  ein Element  $\Theta(X, \overline{\mathcal{V}}_X, f)$  in  $L_{2m}^{S, \tau}(\pi, S_e(D^{i_X M}), w_1)$ , bzw.  $L_{2m}^{S, \tau}(\pi, S_e, w_1)$ .

Die Wohldefiniertheit von  $\Theta$  folgt aus Theorem 5.2.b) in  $[Kr_1]$ .

#### b) Die Whiteheadtorsion von $\Theta(X, \overline{\mathcal{V}}_X, f)$ :

Es soll nun gezeigt werden, daß für  $i \geq 2$  die Whitehead-Torsion von  $\Theta(X, \overline{\mathcal{V}}_X, f)$  verschwindet, d.h. daß  $(\overline{K}_m(X, \overline{\mathcal{V}}_X), \overline{\lambda}, \overline{\rho})$  bereits in  $L_{i+n}^S(\pi, S, w_1)$ , bzw.  $L_{i+n}^S(\pi, w_1)$  liegt.

Die Adjungierte von  $\overline{\lambda}$ ,  $Ad_{\overline{\lambda}} : \overline{K}_m(X, \overline{\mathcal{V}}_X) \longrightarrow \overline{K}_m(X, \overline{\mathcal{V}}_X)^*$  ist genau dann ein einfacher Isomorphismus, wenn  $j_-^{i-1} \circ j_+^i : H_m(X, U_+, \Lambda) \longrightarrow H_m(X, U_-, \Lambda)$  ein einfacher Isomorphismus ist. (Auf  $H_m(X, U_{\pm}, \Lambda)$  ist eine Basis dadurch ausgezeichnet,

daß die Whitehead-Torsion des jeweiligen Paares verschwindet.)

Wegen  $i \geq 2$  können wir  $t_0 \in D_+^{i-1} \cap D_-^{i-1}$  wählen.

Sei  $M' = f^{-1}(\{t_0\} \times M)$ .

Da  $\{t_0\} \times M \xhookrightarrow{D_{\pm}^{i-1}} \times M$  einfache Homotopieäquivalenzen sind, sind auch  $M' \xhookrightarrow{U_{\pm}} \times M$  einfache Homotopieäquivalenzen.

Dann sind  $(i_{\pm})_* : H_m(X, M', \Lambda) \longrightarrow H_m(X, U_{\pm}, \Lambda)$  einfache Isomorphismen, wobei auf  $H_m(X, M', \Lambda)$  wie üblich eine Basis durch das Verschwinden der Whiteheadtorsion von  $(X, M')$  ausgezeichnet ist. Das folgt aus der Beziehung

$$\tau(X, M') = \tau(U_+, M') + \tau(X, U_+) + \tau(H),$$

wobei  $\tau(H)$  die Torsion der Homologiesequenz des Tripels

$(X, U_+, M')$  ist.  $[Mi]$ . Wegen  $\tau(X, M') = \tau(U_+, M') = \tau(X, U_+) = 0$

folgt  $\tau(H) = 0$ .

Weil  $H_m(X, M'; \Lambda)$ , bzw.  $H_m(X, U_+; \Lambda)$  die einzige nicht verschwindende Homologiegruppe des Paares  $(X, M')$ , bzw.  $(X, U_+)$  ist, bedeutet  $\tau(H) = 0$ , daß  $H_m(X, M'; \Lambda) \xrightarrow{(i_+)_*} H_m(X, U_+; \Lambda)$  ein einfacher Isomorphismus ist.

Ebenso folgt, daß  $(i_-)_*: H_m(X, M'; \Lambda) \longrightarrow H_m(X, U_-; \Lambda)$  ein einfacher Isomorphismus ist.

Es gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bar{K}_m(X, \mathcal{V}_X) & \xrightarrow{j'_+} & H_m(X, U_+; \Lambda) \\ \downarrow j'_- & & \uparrow (i_+)_* \\ H_m(X, U_-; \Lambda) & \xleftarrow{(i_-)_*} & H_m(X, M'; \Lambda) \end{array}$$

Diesem Diagramm entnehmen wir, daß  $j'_- \circ j'_+{}^{-1} = (i_-)_* \circ (i_+)_*{}^{-1}$  Komposition zweier einfacher Isomorphismen ist, also selbst einfach ist.

Also verschwindet die Whitehead-Torsion von  $\Theta(X, \mathcal{V}_X, f)$  für  $i \geq 2$  (Vgl. Hilfssatz 3.1).

Damit ist bewiesen, daß in allen Fällen  $\Theta(X, \mathcal{V}_X, f)$  in  $L_{i,n}^{(k)}(M)$  liegt.

### c) Additivität von $\Theta$ und Exaktheitseigenschaft:

Der Beweis der Additivität von  $\Theta$  ist eine Routine-Rechnung mit Mayer-Vietoris-Sequenzen und ist im wesentlichen mit dem Beweis von Proposition 7.1 in  $[Kr_1]$  identisch.

Aus Theorem 5.2 in  $[Kr_1]$  folgt sofort Bild  $\eta = \text{Kern } \Theta$ .

Damit ist der Beweis von Satz 3.4 für  $i+n$  gerade abgeschlossen.

2. Fall:  $i+n = 2m+1$  ungerade,  $m \geq 2$ ,  $k \geq m-1$ .

a) Definition der Surgery-Invariante:

Durch Surgeries, die mit der B-Struktur verträglich sind, kann  $\pi_q(X, U_{\pm})$  für  $q < m$  zu null gemacht werden.

Weil  $\pi_m(U_{\pm}) \longrightarrow \pi_m(B)$  surjektiv ist, ist auch die

Komposition  $\pi_{m+1}(B, X) \longrightarrow \pi_m(X) \longrightarrow \pi_m(X, U_{\pm})$

jeweils surjektiv. Es lassen sich geeignete Einbettungen

$((S^m \times D^{m+1})_i \hookrightarrow X)_{i=1}^r$  wählen, die Bild  $(\pi_{m+1}(B, X) \longrightarrow \pi_m(X))$

repräsentieren. Sei  $U \subset X$  die Vereinigung

dieser Einbettungen und  $\tilde{U}$  das Urbild in der universellen Überlagerung.

Dann ist die Sequenz

$$(*) \quad 0 \longrightarrow H_{m+1}(X \setminus \tilde{U}, \partial U \cup U_{\pm}; \Lambda) \longrightarrow H_m(\partial \tilde{U}) \longrightarrow H_m(X \setminus \tilde{U}, U_{\pm}; \Lambda) \longrightarrow 0$$

kurz exakt. Nach geeignetem Stabilisieren sind alle Moduln der Sequenz frei mit ausgezeichneter Basis.

$G = \partial H_{m+1}(X \setminus \tilde{U}, \partial U \cup U_{\pm}; \Lambda)$  ist ein direkter Summand in  $H_m(\partial \tilde{U})$ , so daß bezüglich der Schnittform  $\lambda$  auf  $H_m(\partial \tilde{U})$   $G = G^{\perp}$  gilt.

Ferner verschwindet die Selbstschnittzahl  $\mu$  auf  $G$ .

Diese Aussagen sind für den Fall  $k \geq m$  in  $[Kr_1]$  bewiesen worden. Mit den zusätzlich gemachten Voraussetzungen folgt das auch für  $k = m-1$ , wie nun gezeigt werden soll.

Weil die Euler-Charakteristiken von  $U_+$  und  $U_-$  übereinstimmen, ist  $G$  ein direkter Summand von halbem Rang in  $H_m(\partial \tilde{U})$

(Vgl.  $[Kr_1]$ , Seite 66, (ii)), und es ist zu zeigen, daß

$\lambda$  und  $\mu$  auf  $G$  verschwinden. (Wegen der zusätzlichen Bedingung  $\langle w_{m+1}(\tilde{\gamma}), \alpha_*[S^{m+1}] \rangle = 0$  für alle  $\alpha \in \pi_{m+1}(B)$  ist  $\mu$  auch für  $m = 3, 7$  auf  $H_m(\partial \tilde{U})$  definiert. (Vgl.  $[Kr_1]$ , Seite 61))

Zu  $x, y \in \text{Kern} (H_m(\partial \tilde{U}) \longrightarrow H_m(X \setminus \tilde{U}, U_+, \Lambda))$  gibt es  $x', y' \in K\pi_m(U_+)$  mit  $j_*(x) = l_*(x')$  und  $j_*(y) = l_*(y')$ , wobei  $j_*: \pi_m(\partial \tilde{U}) \longrightarrow \pi_m(X \setminus \tilde{U})$  und  $l_*: K\pi_m(U_+) \longrightarrow \pi_m(X \setminus \tilde{U})$  durch die Inklusionen induziert sind. Diese Aussage entnimmt man folgendem kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_m(\partial \tilde{U}) & \longrightarrow & \pi_m(X \setminus \tilde{U}, U_+) & \cong & H_m(X \setminus \tilde{U}, U_+, \Lambda) \\ & \searrow j_* & \uparrow & & \\ & & \pi_m(X \setminus \tilde{U}) & \xleftarrow{\ell_*} & K\pi_m(U_+) \\ & & \uparrow & & \\ \pi_m(B) & \xleftarrow{(\nabla_X|_{U_+})_*} & \pi_m(U_+) & \xrightarrow{\quad} & K\pi_m(U_+) \end{array}$$

Sei  $\lambda_{U_+}$  die Schnittform auf  $K\pi_m(U_+)$  und  $\mu_{U_+}$  die zugehörige Selbstschnittform auf  $K\pi_m(U_+)$ . Aus der geometrischen Definition der Schnittzahl, bzw. der Selbstschnittzahl folgt

$$\lambda(x, y) = \lambda_{U_+}(x', y') \quad \text{und} \quad \mu(x) = \mu_{U_+}(x').$$

Da  $U_+$  diffeomorph zu  $D^{i-1} \times M$ , verschwindet  $\lambda_{U_+}$  für  $i \geq 2$  identisch. Wegen der Voraussetzung, daß

$S(D^{i-1} \times M) = \mu_{D^{i-1} \times M}(K\pi_m(D^{i-1} \times M))$  minimal ist, folgt, daß  $\mu_{U_+}$  verschwindet.

Damit ist gezeigt, daß  $(\lambda, \mu)$  auf  $G$  verschwindet.

Auf  $F = \text{Kern} (H_m(\partial \tilde{U}) \longrightarrow H_m(\tilde{U}))$  verschwindet  $(\lambda, \mu)$  ebenfalls. Also ist  $((H_m(\partial \tilde{U})\lambda, \mu), F, G)$  eine schwach gebaste Formation. Das davon in  $L_{2m+1}^{S, \tau}(\pi, w_1)$  repräsentierte Element ist das Surgery-Hindernis  $\Theta(X, \nabla_X, f)$ .

Daß  $\Theta(X, \nabla_X, f)$  nur von der Bordismuskasse in  $\Omega_{2m+1}^{B, S^{i-1} \times M, \nabla_i}$  abhängt, folgt für  $k \geq m$  aus Theorem 6.1 in  $[Kr_1]$ .

Dieser Beweis liefert mit der Zusatzbedingung, daß

$S_{i-1, n}^{(m-1)}(M)$  trivial ist, auch die Wohldefiniertheit im Fall  $k = m-1$ .

b) Die Whitehead-Torsion von  $\Theta(X, \overline{\mathcal{V}}_X, f)$ :

Ähnlich wie im geradedimensionalen Fall soll nun gezeigt werden, daß die  $\Theta(X, \overline{\mathcal{V}}_X, f)$  definierende Formation triviale Whitehead-Torsion hat, falls  $i \geq 2$ .

Dazu muß die von  $G$  auf  $H_m(\partial \tilde{U})$  induzierte Basis mit der kanonischen Basis von  $H_m(\partial \tilde{U})$  verglichen werden (Vgl. Hilfssatz 3.2).

Wir verwenden die exakte Sequenz

$$(*) \quad 0 \longrightarrow H_{m+1}(X \setminus \tilde{U}, \partial U \cup U_+; \Lambda) \xrightarrow{\partial} H_m(\partial \tilde{U}) \xrightarrow{i_*} H_m(X \setminus \tilde{U}, U_+; \Lambda) \longrightarrow 0.$$

Nach Stabilisieren sind alle Moduln in dieser Sequenz

frei. Die Abbildungen  $H_{2m}(\partial \tilde{U}) \xrightarrow{i_*} H_{2m}(X \setminus \tilde{U}, U_+; \Lambda)$  und  $H_1(X \setminus \tilde{U}, \partial U \cup U_+) \xrightarrow{j} H_0(\partial \tilde{U})$  sind Isomorphismen. Alle anderen

Homologiegruppen sind trivial. Auf  $H_{2m}(\partial \tilde{U})$  und  $H_0(\partial \tilde{U})$  haben wir durch die Geometrie gegebene ausgezeichnete Basen. Wir zeichnen nun auf  $H_{2m}(X \setminus \tilde{U}, U_+; \Lambda)$  und  $H_1(X \setminus \tilde{U}, \partial U \cup U_+; \Lambda)$  Basen mittels der Isomorphismen  $i_*$  und  $j$  aus.

Jetzt können wir auf  $H_{m+1}(X \setminus \tilde{U}, \partial U \cup U_+; \Lambda)$  und  $H_m(X \setminus \tilde{U}, U_+; \Lambda)$  Basen dadurch auszeichnen, daß die Whitehead-Torsion von  $(X \setminus \tilde{U}, \partial U \cup U_+)$  und  $(X \setminus \tilde{U}, U_+)$  verschwindet (Siehe [Kr<sub>1</sub>, Seite 66]).

Versieht man  $H_m(\partial \tilde{U} \cup \tilde{U}_+, \tilde{U}_+) = H_m(\partial \tilde{U})$  mit der kanonischen Basis, so folgt, daß auch die Whitehead-Torsion von

$(\partial U \cup U_+, U_+)$  verschwindet. Aus der Additivitätsformel für die Whitehead-Torsion  $\tau(X \setminus \tilde{U}, \partial U \cup U_+) = \tau(X \setminus \tilde{U}, U_+) + \tau(\partial U \cup U_+, U_+) + \tau(H)$  ( $\tau(H)$  Torsion der Homologiegesequenz des Tripels)

folgt  $\tau(H) = 0$ . Wegen der Wahl der Basen in Dimension  $2n$  und  $0$ , bzw.  $1$  ergibt sich, daß die Sequenz  $(*)$  triviale Whitehead-Torsion hat.

Sei nun  $(e'_1, \dots, e'_r)$  eine ausgezeichnete Basis von

$H_{m+1}(X \setminus \tilde{U}, \partial U \cup U_+; \Lambda)$  und  $G' \subset H_m(\partial \tilde{U})$  ein hamiltonisches Komplement zu  $G = \partial H_{m+1}(X \setminus \tilde{U}, \partial U \cup U_+; \Lambda)$ . Sei  $e_i = \partial e'_i$  für  $i=1, \dots, r$ .  $(\lambda(e_i, -))_{i=1}^r$  liefert dann eine Basis von  $(G')^* = \text{Hom}_\Lambda(G', \Lambda)$ . Sei  $(f_i)_{i=1}^r$  die duale Basis.

Da die Whitehead-Torsion der Sequenz  $(*)$  trivial ist, ist  $(e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_r)$  genau dann eine ausgezeichnete Basis von  $H_m(\partial \tilde{U})$ , wenn  $(j_*(f_i))_{i=1}^r$  eine ausgezeichnete Basis von  $H_m(X \setminus \tilde{U}, U_+; \Lambda)$  ist.

Sei nun  $t_0 \in D_+^{i-1} \cap D_-^{i-1}$  und  $M' = f^{-1}(\{t_0\} \times M)$ .

Wie im geradedimensionalen Fall folgt, daß

$H^m(X \setminus \tilde{U}, U_-; \Lambda) \longrightarrow H^m(X \setminus \tilde{U}, M'; \Lambda)$  und  $H^m(X \setminus \tilde{U}, U_+; \Lambda) \longrightarrow H^m(X \setminus \tilde{U}, M'; \Lambda)$  einfache Isomorphismen sind

Außerdem liefert die Poincaré-Dualität einen einfachen

Isomorphismus  $H_{m+1}(X \setminus \tilde{U}, \partial U \cup U_+; \Lambda) \longrightarrow H^m(X \setminus \tilde{U}, U_-; \Lambda)$ ,

wenn man  $(X \setminus \tilde{U}, U_-)$  analog wie  $(X \setminus \tilde{U}, U_+)$  mit Basen versieht.

Dann ist die Komposition  $H_{m+1}(X \setminus \tilde{U}, \partial U \cup U_+; \Lambda) \longrightarrow H^m(X \setminus \tilde{U}, U_-; \Lambda) \longrightarrow H^m(X \setminus \tilde{U}, M'; \Lambda) \longrightarrow H^m(X \setminus \tilde{U}, U_+; \Lambda)$

ein einfacher Isomorphismus  $\varphi$ , wenn  $H^m(X \setminus \tilde{U}, U_+; \Lambda)$

$= \text{Hom}_\Lambda(H_m(X \setminus \tilde{U}, U_+; \Lambda), \Lambda)$  durch die duale Basis einer ausgezeichneten Basis von  $H_m(X \setminus \tilde{U}, U_+; \Lambda)$  gebast ist.

Es gilt  $\varphi(e'_i)(j_*(x)) = \lambda(\partial e'_i, x)$ . Also ist  $(\varphi(e'_i))_{i=1}^r$

die duale Basis zu  $(j_*(f_i))_{i=1}^r$ , und da  $\varphi$  einfacher

Isomorphismus ist, ist  $(j_*(f_i))_{i=1}^r$  eine ausgezeichnete Basis von  $H_m(X \setminus \tilde{U}, U_+; \Lambda)$ .

### c) Additivität von $\Theta$ und Exaktheitseigenschaft:

Die Additivität von  $\Theta$  folgt für  $k \geq \left\lfloor \frac{n+i-1}{2} \right\rfloor$  aus Theorem 7.1 in  $[Kr_1]$ .

Aus Theorem 6.1.b) in  $[Kr_1]$  ergibt sich für  $k \geq \left\lfloor \frac{n+i-1}{2} \right\rfloor$

unmittelbar die Exaktheitseigenschaft Kern  $\Theta = \text{Bild } \eta$ .

Sei nun  $n+i = 2m+1$  ungerade und  $k = \left\lfloor \frac{n+i}{2} \right\rfloor - 1 = m-1$ .

Die Inklusion  $i_{2m+1}^{S, \bar{P}}(\pi, w_1) \hookrightarrow i_{2m+1}^{S, \bar{P}}(\bar{\pi}, w_1)$  bezeichnen wir mit  $\epsilon$ . Dann ist  $(\Theta(X, \bar{V}_X, f))$  genau dann nullbordant, wenn  $\Theta(X, \bar{V}_X, f)$  null ist (Vgl. [Kr<sub>1</sub>, Seite 68]).

Da  $(X, \bar{V}_X, f)$  nach 6.1.b) in  $[Kr_1]$  genau dann  $\mathbb{B}$ -bordant relativ Rand zu einem  $s$ -Kobordismus ist, also im Bild von  $\eta$  liegt, wenn  $\Theta(X, \bar{V}_X, f)$  nullbordant ist, erhält man auch in diesem Fall die Exaktheitseigenschaft.

q.e.d.

Der nächst Schritt besteht in der Bestimmung von Kern  $\eta: NS_k(D^i_{X,M}; \bar{V}_i) \longrightarrow \Omega_{n+i}^{B, S^{i-1} X_M, \bar{V}_i}$ .

Satz 3.5:

Sei  $k \geq \left\lfloor \frac{n+i-1}{2} \right\rfloor$ ,  $n+i \geq 5$ .

Ist  $n+i$  gerade,  $n+i \neq 6, 14$  und  $k = \left\lfloor \frac{n+i-1}{2} \right\rfloor$ ,

so sei  $S(D^i_{X,M})$  minimal und  $i_{n+i+1}^{S, \bar{P}}(\pi, w_1) = \{0\}$  (i.S.  $\bar{\pi}$  endlich von ungerader Ordnung).

Ist  $n+i = 6, 14$  und  $k = \left\lfloor \frac{n+i-1}{2} \right\rfloor$ , so sei für  $\alpha \in \pi_{\frac{n+i}{2}, 1}(B)$   $\alpha_{\frac{n+i}{2}, 1}(\bar{\gamma}), \alpha + [S^{n+i}] = 0$ ,  $S(D^i_{X,M})$  minimal und  $i_{n+i+1}^{S, \bar{P}}(\pi, w_1) = \{0\}$ .

Dann gibt es einen Homomorphismus

$$\partial: L_{i+1, n}^{(k)}(M) \longrightarrow NS_k(D^i_{X,M}; \bar{V}_i), \text{ so daß}$$

$$\eta(X, \bar{V}_X, f) = [D^i_{X,M}, \bar{V}_i, Id] \iff$$

Es existiert ein  $\Theta \in L_{i+1, k}^{(k)}(M)$  mit

$$\partial(\Theta) = (X, \bar{V}_X, f).$$

Beweis:

In [Kr<sub>1</sub>, Prop. 7.2], bzw. [Wa<sub>1</sub>, Theoreme 5.3; 6.5], ist eine Operation von  $L_{n+i+1}^{S, \tau}(\pi, w_1)$ , bzw.  $L_{n+i+1}^{S, \tau}(\pi, S_{i,n}^{(k)}(M), w_1)$ , falls  $n+i$  ungerade,

auf  $NS_{n+i, k}^{B, S^{i-1}xM, \bar{\nu}}$ , den relativen Normalen-k-Smoothings von  $(B, S^{i-1}xM, \bar{\nu}_1)$ , definiert worden.

Indes man diese Operation für Elemente in  $L_{i+1, n}^{(k)}(M)$  auf  $(D_+^i xM, \bar{\nu}_1, Id)$  anwendet, erhält man eine Abbildung

$$\partial: L_{i+1, n}^{(k)}(M) \longrightarrow NS_k(D_+^i xM; \bar{\nu}_1).$$

Die Definition von  $\partial$  sei kurz angedeutet.

Sei  $\Theta \in L_{i+1, n}^{(k)}(M)$  ein beliebiges Element.

Durch zulässiges Henkelankleben an

$$\bar{\nu}_1 \circ pr_{D_+^i xM}: D_+^i xM \times I \longrightarrow B$$

läßt sich eine B-Mannigfaltigkeit  $\bar{\nu}_W: W \longrightarrow B$

mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

a)  $\partial W = D_+^i xM \times \{0\} \cup S^{i-1}xM \times I \cup X.$

b)  $M \xrightarrow{\sim} \{t_0\} \times M \times \{1\} \hookrightarrow S^{i-1}xM \times \{1\} \hookrightarrow X$

ist eine einfache Homotopieäquivalenz.

c)  $\bar{\nu}_W|_X: X \longrightarrow B$  ist ein Normalen-k-Smoothing.

d) Das Surgery-Hindernis von  $(W, \bar{\nu}_W)$  (im Sinne der Klassifikation von Normalen-k-Smoothings in [Kr<sub>1</sub>]) ist  $\Theta$ .

Dann ist  $\partial(\Theta)$  durch  $(X, \bar{\nu}_W|_X, Id)$  gegeben.

(Wegen  $i \geq 1$  ist die Whiteheadtorsion für ein Element in

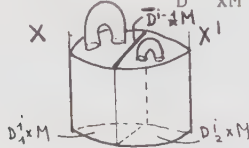
$L_{i+1, n}^{(k)}(M)$  trivial. Deshalb läßt sich die Bedingung b) erreichen,

s.d.  $(X, \bar{\nu}_W|_X, Id)$  tatsächlich in  $NS_k(D_+^i xM; \bar{\nu}_1)$  liegt. Vgl. [Wa<sub>1</sub>])

Die Homomorphieeigenschaft von  $\partial$  ist klar:

Ist  $D_1^i \cup D_2^i$ ,  $(D_1^i \cap D_2^i = \bar{D}^{i-1})$  die Zerlegung von  $D_+^i$  in zwei Scheiben und macht man die Henkeladdition zur Realisierung von  $\Theta$  in  $D_1^i \times M$  und die zur Realisierung von  $\Theta'$  in  $D_2^i \times M$ , so folgt

$$\partial(\Theta + \Theta') = (X \cup_{\bar{D}^{i-1} \times M} X', \bar{\nu}_X \cup \bar{\nu}_{X'}, \text{Id}) = \partial(\Theta) + \partial(\Theta').$$



Wir zeigen nun die Exaktheitseigenschaft.

Für den Fall  $n+i$  gerade sei zunächst  $k \geq \left\lfloor \frac{n+i-1}{2} \right\rfloor$ .

Sei  $\eta(X, \bar{\nu}_X, f) = (D_+^i \times M, \bar{\nu}_i, \text{Id})$ . Dann gibt es eine B-Mannigfaltigkeit  $(W, \bar{\nu}_W, \bar{f})$  zwischen  $(X, \bar{\nu}_X, f)$  und  $(D_+^i \times M, \bar{\nu}_i, \text{Id})$ . Wir wollen untersuchen, wann  $(W, \bar{\nu}_W, \bar{f})$  B-bordant relativ Rand zu einem s-Kobordismus ist.

Die Surgery-Invariante für dieses Problem liegt in  $L_{n+i+1}^{S, \tau}(\pi, w_1)$ , bzw.  $L_{n+i+1}^{S, \tau}(\pi, S_{i,k}^{(k)}(M), w_1)$ .

Genauso wie beim Beweis von Satz 3.4 sieht man, daß diese Surgery-Invariante  $\Theta(W, \bar{\nu}_W, \bar{f}) = \Theta$  bereits in  $L_{i+1,n}^{(k)}(M)$

liegt. Wir zeigen, daß  $\partial(-\Theta) = (X, \bar{\nu}_X, f)$  gilt.

Ist nämlich  $(W', \bar{\nu}_{W'})$  eine B-Mannigfaltigkeit, die

$\partial(-\Theta) = (X', \bar{\nu}_{X'}, \text{Id})$  definiert, so folgt aus der Additivität der Surgery-Invariante ( $[Kr_1, \text{Thm. 7.1}]$ ),

daß  $(W \cup_{D_+^i \times M} W', \bar{\nu}_W \cup \bar{\nu}_{W'})$  Surgery-Invariante null hat.

Also gibt es einen s-Kobordismus zwischen

$(X, \bar{\nu}_X, f)$  und  $(X', \bar{\nu}_{X'}, \text{Id}) = \partial(-\Theta)$ ,

d.h.  $(X, \bar{\nu}_X, f) \in \text{Bild } \partial$ .

Ist  $n+i$  gerade und  $k = \left\lfloor \frac{n+i-1}{2} \right\rfloor$ , so steht nicht mehr die Additivität der Surgery-Invariante zur Verfügung.

Deshalb wird jetzt zusätzlich  $L_{n+i+1}^S(\pi, w_1) = \{0\}$  vorausgesetzt.  
 Ist  $(W, \bar{\nu}_W, \bar{f})$  ein B-Bordismus zwischen  $(X, \bar{\nu}_X, f) \in NS_k(D^i \times M; \bar{\nu}_1)$   
 und  $(D_+^i \times M, \bar{\nu}_1, Id)$ , so liegt das Surgery-Hindernis wegen  
 der gemachten Voraussetzungen in  $L_{n+i+1}^S(\pi, w_1) = \{0\}$ , d.h.  
 $(W, \bar{\nu}_W, \bar{f})$  ist B-bordant relativ Rand zu einem s-Kobordismus.  
 Damit ist „ $\Rightarrow$ “ von Satz 3.5 bewiesen.

Sei  $\Theta \in L_{i+1, n}^{(k)}(M)$  beliebig. Der  $\partial(\Theta) = (X, \bar{\nu}_X, Id)$  definierende  
 B-Bordismus  $(W, \bar{\nu}_W)$  ist ein B-Bordismus relativ Rand  
 zwischen  $(X, \bar{\nu}_X, Id)$  und  $(D_+^i \times M, \bar{\nu}_1, Id)$ , d.h.  
 $\eta \partial(\Theta) = (D_+^i \times M, \bar{\nu}_1, Id)$ .  
 Damit ist auch „ $\Leftarrow$ “ gezeigt.  
 q.e.d.

#### Bemerkung:

Im Beweis von Satz 3.7 werden wir mit anderen Methoden  
 zeigen, daß im 1-zusammenhängenden Fall für  $n+i = 6, 14$   
 und  $k = \frac{n+i}{2} - 1$  Satz 3.5 auch richtig ist, wenn  
 $H_{n+i}^{2k}(M; \mathbb{Z}) = \{0\}$  gilt.

Bevor die bisherigen Ergebnisse in einer langen Sequenz  
 zusammengefaßt werden, soll gezeigt werden, daß  
 $\Omega_{n+i}^{B, S^{i-1} \times M, \bar{\nu}_i}$  isomorph zur Bordismusgruppe der  
 geschlossenen  $(n+i)$ -dimensionalen B-Mannigfaltigkeiten ist.  
 Für diese Bordismusgruppen existiert die Thom-Pontrjagin-  
 Konstruktion, so daß durch Anwendung der Methoden der  
 stabilen Homotopietheorie in gewissen Fällen konkrete  
 Berechnungen möglich sind.

Hilfssatz 3.6:

Es gibt einen bijektiven Homomorphismus

$$\Psi: \Omega_{n+1}^{B, S^{i-1} \times M, \bar{\nu}_i} \longrightarrow \Omega_{n+1}^B,$$

wobei  $\Omega_{n+1}^B$  die Bordismusgruppe geschlossener  $(n+1)$ -dimensionaler  $B$ -Mannigfaltigkeiten ist.

Insbesondere ist auch  $\Omega_{n+1}^{B, S^{i-1} \times M, \bar{\nu}_i}$  eine abelsche Gruppe.

Beweis:

Ist  $(X, \bar{\nu}_X, f)$  eine relative  $B$ -Mannigfaltigkeit, so liefern  $\bar{\nu}_X$  und  $-\bar{\nu}_i$  wegen  $f^* \bar{\nu}_i = \bar{\nu}_X|_{\partial X}$  eine  $B$ -Struktur  $(\bar{\nu}_X \cup -\bar{\nu}_i)$  auf  $(X \cup_f D_+^i \times M)$ .

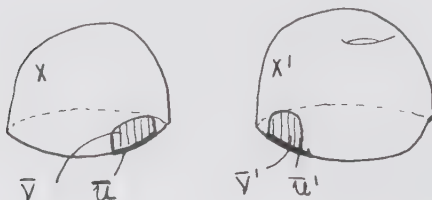
Sei  $\Psi(X, \bar{\nu}_X, f) = (X \cup_f D_+^i \times M, (\bar{\nu}_X \cup -\bar{\nu}_i))$ .

Ist  $(W, \bar{\nu}_W, \bar{f})$  ein  $B$ -Bordismus zwischen  $(X, \bar{\nu}_X, f)$  und  $(X', \bar{\nu}_{X'}, f')$ , so liefert  $(W \cup_{\bar{f}} D_+^i \times M \times I, (\bar{\nu}_W \cup -\bar{\nu}_i, \text{pr}))$  einen  $B$ -Bordismus zwischen den  $B$ -Mannigfaltigkeiten  $X \cup_f D_+^i \times M$  und  $X' \cup_{f'} D_+^i \times M$ .

Also ist  $\Psi$  wohldefiniert.

Wir zeigen nun, daß  $\Psi$  ein Homomorphismus ist.

Seien  $(X, \bar{\nu}_X, f)$  und  $(X', \bar{\nu}_{X'}, f')$  relative  $B$ -Mannigfaltigkeiten. Sei  $\bar{V} \subset X$  eine Kragenumgebung von  $\bar{U} = f^{-1}(\bar{D}^{i-1} \times M)$  und  $\bar{V}' \subset X'$  eine Kragenumgebung von  $\bar{U}' = f'^{-1}(\bar{D}^{i-1} \times M)$ ,



so daß  $h: \bar{V} \rightarrow \bar{V}'$ , gegeben durch  $(f'^{-1} \times \text{Id}_I) \circ (s \times \text{Id}_I) \circ (f \times \text{Id}_I)|_{\bar{V}}$  ein Diffeomorphismus ist.

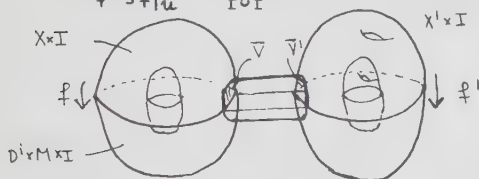
Aus  $(X \cup_f D_+^i \times M) \times I + (X' \cup_{f'} D_+^i \times M) \times I$  läßt sich durch

Zusammenkleben längs  $\bar{V} \cup (\bar{D}^{i-1} \times M \times I)$  mittels  $h \cup (s \times \text{Id}_I)$

ein B-Bordismus zwischen

$$(X \cup_f D_+^i \times M, \bar{\nu}_X \cup \bar{\nu}_i) + (X' \cup_{f'} D_+^i \times M, \bar{\nu}_{X'} \cup \bar{\nu}_i) \text{ und}$$

$$((X \cup_{f \circ f'} X') \cup_{f \circ f'} D_+^i \times M, (\bar{\nu}_X \cup \bar{\nu}_{X'}) \cup \bar{\nu}_i) \text{ konstruieren:}$$



Also ist  $\Psi$  ein Homomorphismus.

Sei  $\bar{\Psi}: \Omega_{n+i}^B \longrightarrow \Omega_{n+i}^{B, S^{i-1} \times M, \bar{\nu}_i}$  wie folgt definiert:

Repräsentiere eine B-Bordismusklass durch eine

zusammenhängende B-Mannigfaltigkeit  $(N, \bar{\nu}_N)$ .

Dann ist  $(N, \bar{\nu}_N) \# (D_+^i \times M, \bar{\nu}_i)$  eine B-Mannigfaltigkeit

mit Rand  $S^{i-1} \times M$ .

$$\text{Sei } \bar{\Psi}(N, \bar{\nu}_N) = (N \# D_+^i \times M, \bar{\nu}_N \# \bar{\nu}_i, \text{Id}).$$

Sei  $(V, \bar{\nu}_V)$  ein B-Bordismus zwischen  $(N, \bar{\nu}_N)$  und  $(N', \bar{\nu}_{N'})$  mit

$N$  und  $N'$  zusammenhängend. Sei  $H: I \times D^{n+i} \hookrightarrow V$  eine mit der

lokalen Orientierung verträgliche Einbettung mit  $H(\{0\} \times D^{n+i}) \subset N$ ,

$H(\{1\} \times D^{n+i}) \subset N'$  und  $H([0, 1] \times D^{n+i}) \subset V \setminus \partial V$ ; und  $h = H|_{I \times S^{n+i-1}}$ .

Ferner sei  $H' = \text{Id}_I \times g: I \times D^{n+i} \hookrightarrow I \times D_+^i \times M$  eine Einbettung,

gegeben durch  $g: D^{n+i} \hookrightarrow D_+^i \times M$  (ebenfalls mit der lokalen

Orientierung verträglich); und  $h' = H'|_{I \times S^{n+i-1}}$ .

Bezeichnen wir  $V \setminus \text{Bild } H$  mit  $V_0$  und  $I \times D_+^i \times M \setminus \text{Bild } H'$  mit

$I \times (D_+^i \times M)_0$ , so ist  $(V_0 \cup_{h \circ h^{-1}} I \times (D_+^i \times M)_0, \bar{\nu}_V|_{V_0} \cup \bar{\nu}_i \circ \text{pr}_{(D_+^i \times M)_0}, \text{Id})$

ein B-Bordismus zwischen  $(N \# D_+^i \times M, \bar{\nu}_N \# \bar{\nu}_i, \text{Id})$  und  $(N' \# D_+^i \times M, \bar{\nu}_{N'} \# \bar{\nu}_i, \text{Id})$ .

Also ist  $\bar{\Psi}$  wohldefiniert.

Dann gilt  $\Psi \bar{\Psi} (N, \bar{\nu}_N) = \Psi (N \# D_+^i \times M, \bar{\nu}_N \# \bar{\nu}_i)$

$$= ((N \# D_+^i \times M) \cup_{\text{Id}} D_+^i \times M, (\bar{\nu}_N \# \bar{\nu}_i) \cup -\bar{\nu}_i)$$

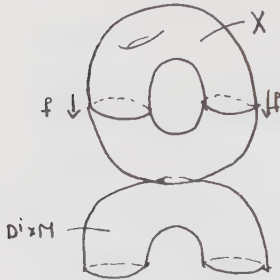
$$= (N \# S^{i-1} \times M, \bar{\nu}_N \# \bar{\nu}_{i,1}) = (N, \bar{\nu}_N) + (S^{i-1} \times M, \bar{\nu}_{i,1}).$$

Da  $\bar{\nu}_{i,1}$  auf  $D_+^{i+1} \times M$  fortsetzbar ist, folgt  $\Psi \bar{\Psi} = \text{Id}$ ,

d.h.  $\Psi$  ist surjektiv.

Weiterhin gilt  $\bar{\Psi} \Psi (X, \bar{\nu}_X, f) = \bar{\Psi} (X \cup_f D_+^i \times M, \bar{\nu}_X \cup -\bar{\nu}_i)$

$$= (X \cup_f D_+^i \times M \# D_+^i \times M, (\bar{\nu}_X \cup -\bar{\nu}_i) \# \bar{\nu}_i, \text{Id}).$$



$(D_+^i \times M \# D_+^i \times M, -\bar{\nu}_i \# \bar{\nu}_i)$  ist relativ Rand bordant zu

$(D_+^i \times M + D_+^i \times M, -\bar{\nu}_i + \bar{\nu}_i)$ , was wiederum relativ Rand

bordant zu  $(S^{i-1} \times M \times I, \bar{\nu}_i \circ \text{pr})$  ist (Bordismus  $D_+^i \times M \times I$ ).

Also ist die durch  $\bar{\Psi} \Psi (X, \bar{\nu}_X, f)$  repräsentierte Mannig-

faltigkeit B-bordant zu  $(X \cup_f S^{i-1} \times M \times I, \bar{\nu}_X \cup \bar{\nu}_i \circ \text{pr}_{S^{i-1} \times M}, \text{Id})$ ,

d.h. es wird mittels  $f$  ein Kragen angeheftet.

Da  $(X \cup_f S^{i-1} \times M \times I) \cup_{f^{-1} X} X, (\bar{\nu}_X \cup \bar{\nu}_i \circ \text{pr}_{S^{i-1} \times M}) \cup -\bar{\nu}_X \cong (X \cup -X, \bar{\nu}_X \cup -\bar{\nu}_X)$

$\cong \partial(I \times X, \bar{\nu}_X \circ \text{pr}_X)$  B-nullbordant ist, sind

$(X \cup_f S^{i-1} \times M \times I, (\bar{\nu}_X \cup \bar{\nu}_i \circ \text{pr}_{S^{i-1} \times M}) \cup -\bar{\nu}_X, \text{Id})$  und  $(X, \bar{\nu}_X, f)$  B-bordant relativ Rand.

Also gilt  $\bar{\Psi} \Psi (X, \bar{\nu}_X, f) = (X, \bar{\nu}_X, f)$ , und da  $(X, \bar{\nu}_X, f)$  beliebig war,

$\bar{\Psi} \Psi = \text{Id}$ . Also ist  $\Psi$  injektiv.

q.e.d.

Satz 3.7: (Surgery-Sequenz für relative Normalen-k-Smoothings)

Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit,  $n \geq 4$ ,

und  $F_k \xrightarrow{P} B \xrightarrow{P} BO$  der Normalen- $k$ -Typ von  $M$ ,

wobei  $k \geq \left\lfloor \frac{n+i-1}{2} \right\rfloor$ .

Ist  $n+i$  gerade,  $n+i \neq 6, 14$ , und  $k = \frac{n+i}{2} - 1$ , so sei

$$S(D^i \times M) \text{ minimal und } L_{n+i+1}^S(\pi, w_1) = \{0\}.$$

Ist  $n+i = 6, 14$  und  $k = \frac{n+i}{2} - 1$ , so sei für  $\alpha \in \pi_{k+2}(B)$

$$\langle w_{k+2}(\bar{\gamma}), \alpha_*[S^{k+2}] \rangle = 0, \quad S(D^i \times M) \text{ minimal und } L_{n+i+1}(\pi, w_1) = \{0\}$$

oder  $M$  1-zusammenhängend und  $H_{k+1}(M; \mathbb{Z}) = \{0\}$ .

Dann gibt es eine exakte Sequenz von Gruppen

$$\begin{aligned} L_{i+1,n}^{(k)}(M) &\xrightarrow{\partial} NS_k(D^i \times M; \bar{\nu}_i) \xrightarrow{\eta} \Omega_{n+i}^B \xrightarrow{\Theta} L_{i,n}^{(k)}(M) \\ &\longrightarrow NS_k(D^{i-1} \times M; \bar{\nu}_{i-1}) \longrightarrow \dots \longrightarrow NS_k(D^1 \times M; \bar{\nu}_1) \\ &\hspace{15em} \longrightarrow \Omega_{n+1}^B \longrightarrow L_{1,n}^{(k)}(M). \end{aligned}$$

Alle Gruppen bis auf evtl.  $NS_k(D^1 \times M; \bar{\nu}_1)$  sind abelsch.

Beweis:

Wir identifizieren für  $j = 1, \dots, i$   $\Omega_{n+j}^{B, S^{i-1} \times M, \bar{\nu}_i}$  mittels

$\Psi$  aus Hilfssatz 3.6 mit  $\Omega_{n+j}^B$ . Die Abbildungen in der

Sequenz und die Exaktheit an den Stellen  $NS_k(D^j \times M; \bar{\nu}_j)$

für  $j = 1, \dots, i-1$  und an den Stellen  $\Omega_{n+j}^B$  für

$j = 1, \dots, i$  erhält man unmittelbar aus den Sätzen 3.4

und 3.5, ebenso die Exaktheit an der Stelle  $NS_k(D^i \times M; \bar{\nu}_i)$

außer für den Fall, daß  $n+i = 6, 14$ ,  $k = \frac{n+i}{2} - 1$ ,  $M$

1-zusammenhängend und  $H_{k+1}(M; \mathbb{Z}) = \{0\}$  gilt. Wir beweisen

zunächst die Exaktheit an der Stelle  $NS_k(D^i \times M; \bar{\nu}_i)$  für

diesen Fall.

Sei also  $n+i = 2m = 6, 14$ ,  $M$  1-zusammenhängend,  $k = \frac{n+i}{2} - 1$

und  $H_m(M; \mathbb{Z}) = \{0\}$ .

Es gilt  $L_{i+1,n}^{(k)}(M) = L_{n+i+1}^{(k)}(e) = \{0\}$ , d.h. wir müssen zeigen,

daß Kern  $\eta : NS_k(D^i \times M; \overline{\nu}_i) \longrightarrow \Omega_{n+i}^B$  trivial ist.

Der Beweis folgt aus der stabilen Klassifikation relativer Normalen-k-Smoothings und dem Kürzungssatz [Kr<sub>1</sub>, §§2, 3].

Sei  $(X, \overline{\nu}_X, f)$  ein relatives Normalen-k-Smoothing von  $D^i \times M$ .

Aus  $\eta(X, \overline{\nu}_X, f) = 0$  folgt, daß es einen relativen B-Bordismus zwischen  $(X, \overline{\nu}_X, f)$  und  $(D_+^i \times M, \overline{\nu}_i, Id)$  gibt.

Aus der stabilen Klassifikation der relativen Normalen-k-Smoothings folgt, daß  $(X, \overline{\nu}_X, f)$  und  $(D_+^i \times M; \overline{\nu}_i, Id)$  stabil s-kobordant sind [Kr<sub>1</sub>, Theorem 2.1], d.h. es gibt einen s-Kobordismus  $(W, \overline{\nu}_W, \overline{f})$  zwischen  $(X \# r(S^m \times S^m); \overline{\nu}_X \# \alpha_1 \# \dots \# \alpha_r; f)$  und  $(D_+^i \times M \# r(S^m \times S^m); \overline{\nu}_i \# \alpha'_1 \# \dots \# \alpha'_r; Id)$  für geeignetes  $r \in \mathbb{N}$ . Dabei sind  $\alpha_i, \alpha'_i: S^m \times S^m \longrightarrow B$ ,  $i=1, \dots, r$  elementare B-Strukturen von  $S^m \times S^m$  (Vgl. [Kr<sub>1</sub>, §2, Seite 18]).

Also gibt es einen Diffeomorphismus von B-Mannigfaltigkeiten

$$F: (X \# r(S^m \times S^m), \overline{\nu}_X \# \alpha_1 \# \dots \# \alpha_r) \longrightarrow (D_+^i \times M \# r(S^m \times S^m); \overline{\nu}_i \# \alpha'_1 \# \dots \# \alpha'_r)$$

mit  $F|_{\partial(X \# r(S^m \times S^m))} = f$  (Hilfssatz 2.8).

Da  $H_m(M; \mathbb{Z}) = \{0\}$ , gilt  $H_m(X \# r(S^m \times S^m); \mathbb{Z}) \cong H_m(D_+^i \times M \# r(S^m \times S^m); \mathbb{Z}) \cong H_m(r(S^m \times S^m); \mathbb{Z})$  und  $F_* = \lambda(F)$  ist eine Isometrie der Schnittform.

Da  $\pi_0 \text{Diff}(r(S^m \times S^m)) \longrightarrow \text{Aut}(H_m(r(S^m \times S^m); \mathbb{Z}), \circ)$  surjektiv ist [Kr<sub>3</sub>, Theorem 2], kann o.B.d.A.  $F_* = Id$  angenommen werden, und es gilt  $F^*(\overline{\nu}_i \# \alpha'_1 \# \dots \# \alpha'_r) = \overline{\nu}_X \# \overline{\nu}_r(S^m \times S^m)$ .

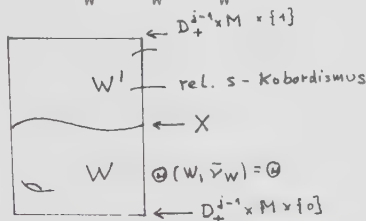
Dann ist  $X \times I \sqcup r(S^m \times D^{m+1}) \cup_F D_+^i \times M \times I \sqcup r(D^{m+1} \times S^m)$  ein relativer s-Kobordismus zwischen  $X$  und  $D_+^i \times M$ , (Vgl. [Kr<sub>1</sub>, Seite 29]) und wegen  $F^*(\overline{\nu}_i \# \alpha'_1 \# \dots \# \alpha'_r) = \overline{\nu}_X \# \overline{\nu}_r(S^m \times S^m)$  läßt sich die B-Struktur  $\overline{\nu}_X + \overline{\nu}_i: X + D_+^i \times M \longrightarrow B$  auf diesen s-Kobordismus fortsetzen. Das bedeutet, daß  $(X, \overline{\nu}_X, f)$  und  $(D_+^i \times M; \overline{\nu}_i, Id)$  s-kobordant sind, d.h. Kern  $\eta$  ist trivial.

Wir zeigen nun die Exaktheit an der Stelle  $L_{j,n}^{(k)}(M)$  für  $j = 2, \dots, i$ .

Sei  $\Theta \in L_{j,n}^{(k)}(M)$  mit  $\partial(\Theta) = (X, \bar{\nu}_X, \text{Id})$  und  $(W, \bar{\nu}_W)$  der B-Bordismus, der  $\partial(\Theta)$  definiert. Insbesondere gilt  $\partial W = D_+^{j-1} \times M \times \{0\} \cup S^{j-2} \times M \times I \cup X$ .

Angenommen  $\Theta \in \text{Kern } \partial$ . Dann gibt es einen relativen s-Kobordismus  $(W', \bar{\nu}_{W'}, \bar{f})$  zwischen  $(X, \bar{\nu}_W|_X, \text{Id})$  und  $(D_+^{j-1} \times M, \bar{\nu}_{j-1}, \text{Id})$ .

Sei  $\bar{W} = W \cup W'$  und  $\bar{\nu}_{\bar{W}} = \bar{\nu}_W \cup \bar{\nu}_{W'}$ .



Es gilt  $\partial \bar{W} = D_+^{j-1} \times M \times \{0\} \cup S^{j-2} \times M \times I' \cup D_+^{j-1} \times M \times \{1\}$

und  $h = \text{Id}_{D_+^{j-1} \times M \times \{0\}} \cup \bar{f} \cup \text{Id}_{D_+^{j-1} \times M \times \{1\}}$  läßt sich als Diffeomorphismus  $h: \partial \bar{W} \rightarrow S^{j-1} \times M$  mit  $h^* \bar{\nu}_{j-1} = \bar{\nu}_{\bar{W}}|_{\partial \bar{W}}$  auffassen.

Also ist  $(\bar{W}, \bar{\nu}_{\bar{W}}, h)$  eine relative B-Mannigfaltigkeit,

d.h. dieses Tripel repräsentiert ein Element in

$\Omega_{n+j}^{B, S^{j-1} \times M, \bar{\nu}_j}$ . Aus der Additivität der Surgery-Invariante

folgt  $\Theta(\bar{W}, \bar{\nu}_{\bar{W}}, h) = \Theta$ , da  $\Theta(W', \bar{\nu}_{W'}, \bar{f}) = 0$ .

Daraus folgt nach Identifikation von  $\Omega_{n+j}^{B, S^{j-1} \times M, \bar{\nu}_j}$  mit

$\Omega_{n+j}^B$  Kern  $\partial \subset \text{Bild } \Theta$ .

Wir zeigen nun die umgekehrte Inklusion  $\text{Bild } \Theta \subset \text{Kern } \partial$ .

Sei  $(N, \bar{\nu}_N)$  eine geschlossene  $(n+j)$ -dimensionale zusammenhängende B-Mannigfaltigkeit und

$\Theta = \Theta(N \# D_+^j \times M, \bar{\nu}_N \# \bar{\nu}_j, \text{Id})$ . Zu zeigen ist, daß  $\partial \Theta$  und  $(D_+^{j-1} \times M, \bar{\nu}_{j-1}, \text{Id})$  s-kobordant sind.

Die relative B-Mannigfaltigkeit  $(N \# D_+^j \times M, \bar{\nu}_N \# \bar{\nu}_j, \text{Id})$

bezeichnen wir kurz mit  $(Y, \overline{\nu}_Y, \text{Id})$ .

Sei  $(W, \overline{\nu}_W)$  ein B-Bordismus, der  $\partial \otimes = (X, \overline{\nu}_X, \text{Id})$  realisiert.

Dann ist  $(W \cup_{D_+^i \times M} -Y, \overline{\nu}_W \cup -\overline{\nu}_Y)$  eine B-Mannigfaltigkeit mit Surgery-Invariante 0 (Additivität), d.h. diese B-Mannigfaltigkeit ist relativ Rand bordant zu einem s-Kobordismus.

Also sind  $\partial \otimes = (X, \overline{\nu}_X, \text{Id})$  und  $(D_+^{j-1} \times M, \overline{\nu}_{j-1}, \text{Id})$  s-kobordant.

Damit ist gezeigt, daß die angegebene Sequenz in allen Fällen eine exakte Sequenz von Halbgruppen mit ausgezeichnetem neutralen Element ist.

Wir beweisen nun mit Hilfe der Exaktheit der Sequenz, daß  $\text{NS}_k(D_+^i \times M, \overline{\nu}_1)$  für  $k \geq \left[ \frac{n+i-1}{2} \right]$  eine Gruppe ist.

Sei  $(X, \overline{\nu}_X, f)$  ein beliebiges Normalen-k-Smoothing.

Sei  $s: S^{i-1} \times M \longrightarrow S^{i-1} \times M$  durch eine Spiegelung  $s'$  auf  $S^{i-1}$  induziert, d.h.  $s = s' \times \text{Id}_M$ .

Dann gilt  $\eta(X, -\overline{\nu}_X, s \circ f) = (X \cup_{s \circ f} D_+^i \times M, -\overline{\nu}_X \cup -\overline{\nu}_1)$ .

Ist  $\overline{s} = s' \times \text{Id}_M: D_+^i \times M \longrightarrow D_+^i \times M$  die Fortsetzung von  $s$  auf  $D_+^i \times M$ , so ist

$\text{Id}_X \cup \overline{s}^{-1}: (X \cup_{s \circ f} D_+^i \times M, -\overline{\nu}_X \cup -\overline{\nu}_1) \longrightarrow (X \cup_f D_+^i \times M, -\overline{\nu}_X \cup \overline{\nu}_1)$

ein Diffeomorphismus von B-Mannigfaltigkeiten, und

wir erhalten  $\eta(X, -\overline{\nu}_X, s \circ f) = (X \cup_f D_+^i \times M, -\overline{\nu}_X \cup \overline{\nu}_1)$   
 $= - (X \cup_f D_+^i \times M, \overline{\nu}_X \cup -\overline{\nu}_1) = - \eta(X, \overline{\nu}_X, f)$ .

Da  $\eta$  additiv ist, ist damit gezeigt, daß Bild  $\eta$  eine Untergruppe von  $\Omega_{n+i}^B$  ist.

Aus der Exaktheit der Sequenz als Sequenz von Halbgruppen mit neutralem Element folgt damit, daß  $\text{NS}_k(D_+^i \times M; \overline{\nu}_1)$  eine Gruppe ist. Also ist diese Sequenz eine exakte Sequenz von Gruppen. q.e.d.

Bemerkung 3.8:

Die Sequenz 3.7 setzt die Sequenz

$$L_{n+1}^{s, \tau}(\pi, w_1) \longrightarrow NS_{n,k}^{B_k(M)} \longrightarrow A\Omega_n^{B_k(M)} \longrightarrow L_n^{h,p}(\pi, w_1)$$

([Kr<sub>1</sub>, Theorem 7.3.B] )

für  $k \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  und  $n \geq 5$  nach links fort.

Das folgt unmittelbar, da der Beweis der Exaktheit an der Stelle  $L_{i,n}^{(k)}(M)$  auch für  $i = 1$  gilt.

Für  $n = 3$  existiert die Sequenz 3.7 rechts bis zur Stelle  $L_{2,3}^{(k)}(M)$ , für  $n = 2$  bis zur Stelle  $L_{3,2}^{(k)}(M)$  und für  $n = 1$  bis zur Stelle  $L_{4,1}^{(k)}(M)$ .

Im allgemeinen ist es besonders günstig, mit dem kleinstmöglichen Normalen- $k$ -Typ von  $M$  zu arbeiten. Ist  $n+i$  gerade,  $n+i \neq 6, 14$ , so muß  $S(D^i \times M)$  minimal sein, um Satz 3.7 anwenden zu können. Folgender Hilfssatz liefert im einfach zusammenhängenden Fall ein hinreichendes Kriterium für die Minimalität von  $S(D^i \times M)$ .

Hilfssatz 3.9:

Sei  $M$  1-zusammenhängend,  $n+i = 2m$  gerade,  $n+i \neq 2, 4, 6, 14$ ,  $k = \frac{n+i}{2} - 1$ . Sei hier  $K\pi_m(D_+^i \times M) = \text{Kern } \pi_m(D_+^i \times M) \rightarrow \pi_m(BO)$ . Falls  $n+i \equiv 2 \pmod{4}$ ,  $n+i \neq 6, 14$ , so sei  $v_{m+1}(M) = 0$  und  $H_m(M; \mathbb{Z}) = 0$ .

Dann gilt  $\mu|_{K\pi_m(D_+^i \times M)} = 0$ . Insbesondere ist  $S(D^i \times M)$  minimal.

Beweis:

Sei  $n+i \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $n+i \geq 8$ .

$\alpha \in K\mathcal{N}_m(M)$  läßt sich durch eine eingebettete Sphäre  $S^m \subset D_{+}^{i \times m}$  mit stabil trivialem Normalenbündel repräsentieren.

Da die Selbstschnittzahl  $\lambda(\alpha, \alpha)$  verschwindet, ist die Eulerklasse des instabilen Normalenbündels  $\mathcal{V}(S^m, D_{+}^{i \times m})$  null. Also ist  $\mathcal{V}(S^m, D_{+}^{i \times m})$  trivial, d.h. jedes Element aus  $K\mathcal{N}_m(M)$  kann durch eine eingebettete Sphäre in  $D_{+}^{i \times m}$  mit trivialem Normalenbündel repräsentiert werden. Also verschwindet  $\mu$  auf  $K\mathcal{N}_m(D_{+}^{i \times m})$ .

Sei nun  $n+i = 2m \equiv 2 \pmod{4}$ ,  $n+i \neq 6, 14$ .

$\alpha \in K\mathcal{N}_m(D_{+}^{i \times m})$  läßt sich wieder durch eine eingebettete Sphäre  $S^m \subset D_{+}^{i \times m}$  mit stabil trivialem Normalenbündel repräsentieren. Dann ist  $\mathcal{V}(S^m, D_{+}^{i \times m})$  entweder das Tangentialbündel der  $S^m$  oder das triviale Bündel, und es gilt  $\mu(\alpha) = 0$  (bzw. 1) genau dann, wenn  $\mathcal{V}(S^m, D_{+}^{i \times m})$  trivial (bzw. isomorph zu  $\mathcal{T}_{S^m}$ ) ist. Es ist wohlbekannt, daß das Tangentialbündel homologisch entdeckt werden kann, wenn die  $(m+1)$ -te Wu-Klasse  $v_{m+1}(M)$  null ist, d.h. daß  $\mu$  in diesem Fall über die Homologie faktorisiert.

Wir skizzieren den Beweis dafür.

Sei  $BO \langle v_{m+1} \rangle \longrightarrow BO$  die durch die universelle Wu-Klasse  $v_{m+1}: BO \longrightarrow K(\mathbb{Z}_2, m+1)$  induzierte Faserung über  $BO$ .

Wegen  $v_{m+1}(M) = 0$  gibt es eine  $BO \langle v_{m+1} \rangle$ -Struktur

$\overline{\nu}: S^{i \times m} \longrightarrow BO \langle v_{m+1} \rangle$ . Sei  $\gamma: S^{i \times m} \longrightarrow K(\mathbb{Z}_2, m)$  eine  $\mathbb{Z}_2$ -Kohomologieklasse. Sei  $S^{i \times m}$  in den  $\mathbb{R}^{n+i+N}$  eingebettet und  $\nu = \nu(S^{i \times m}; \mathbb{R}^{n+i+N})$ .

Die Komposition der Spektren-Abbildungen

$$\underline{S}^{2m} \xrightarrow{M(t)} M(\nu) \xrightarrow{\Delta} M_+ \wedge M(\nu) \xrightarrow{\nu \wedge M(\overline{\nu})} K(\mathbb{Z}_2, m) \wedge MO \langle v_{m+1} \rangle$$

liefert ein Element  $\lambda(\varphi)$  in  $\pi_{2m}(K(\mathbb{Z}_2, m) \wedge MO\langle v_{m+1} \rangle)$ .

Dabei ist  $M(t)$  von der Thom-Abbildung  $t: S^{n+i+N} \rightarrow T(\nu)$ ,

$\Delta$  von der Diagonalen  $M \rightarrow M \times M$  und  $M(\bar{\nu})$  von  $\bar{\nu}: S^i \times M \rightarrow BO\langle v_{m+1} \rangle$  induziert [Vgl. Jo, Re].

Aus den Arbeiten von Browder und Brown [Br, Le.3.2, 3.3]

[Bro] erhält man folgende Aussage:

Es gibt einen surjektiven Homomorphismus

$$\varepsilon: \pi_{2m}(K(\mathbb{Z}_2, m) \wedge MO\langle v_{m+1} \rangle) \longrightarrow \mathbb{Z}_4.$$

Wird das Poincaré-Duale von  $\mathcal{V}$  durch eine eingebettete

Sphäre  $S^m \subset S^i \times M$  mit stabil trivialem Normalenbündel

repräsentiert, so gilt  $\varepsilon \circ \lambda(\varphi) = 0$  (bzw.  $2 \in \mathbb{Z}_4$ )

genau dann, wenn  $\mathcal{V}(S^m, S^i \times M)$  trivial (bzw. das

Tangentialbündel der  $S^m$ ) ist.

Ist  $\alpha \in K\pi_m(D_+^i \times M)$  und  $\gamma_\alpha$  das Poincaré-Duale zu

$$i_* \alpha_* [S^m] \in \text{Bild} \left( H_m(M; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_m(M; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i_*} H_m(S^i \times M; \mathbb{Z}_2) \right),$$

so folgt  $\mu(\alpha) = \varepsilon \circ \lambda(\gamma_\alpha)$ , d.h.  $\mu$  faktorisiert über die

Homologie. ( $\{0, 2\} \subset \mathbb{Z}_4$  wird mit  $\mathbb{Z}_2$  identifiziert.)

Da in unserem Fall  $H_m(M; \mathbb{Z}) = \{0\}$  vorausgesetzt ist, verschwindet  $\mu$  auf  $K\pi_m(D_+^i \times M)$ .

Insbesondere ist wegen Kern  $(\bar{\nu}_i: \pi_m(D_+^i \times M) \rightarrow \pi_m(B)) \subset K\pi_m(D_+^i \times M)$   $S(D^i \times M)$  minimal.

q.e.d.

#### § 4 $\overline{\mathcal{V}}_i$ -kompatible Faserhomotopieäquivalenzen von B

In diesem Kapitel soll die Beziehung zwischen den relativen Normalen-k-Smoothings auf  $D^i \times M$  und den Blockdiffeomorphismen von M untersucht werden.

Der Unterschied zwischen diesen Gruppen wird in einer langen exakten Sequenz durch  $\overline{\mathcal{V}}_i$ -kompatible Faserhomotopieäquivalenzen gemessen. Diese Faserhomotopieäquivalenzen bilden eine Gruppe  $\text{Aut}((B,p)\text{rel}\overline{\mathcal{V}}_i)$ .

Wir leiten eine exakte Sequenz zur Bestimmung von  $\text{Aut}((B,p)\text{rel}\overline{\mathcal{V}}_i)$  her und wenden sie für  $(k-i+1)$ -zusammenhängende Mannigfaltigkeiten an.

Es folgt, daß für  $i > n+1$  und  $k = \left\lfloor \frac{n+i-1}{2} \right\rfloor$  die Gruppen  $\pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M)$  und  $\text{NS}_k(D^i \times M; \overline{\mathcal{V}}_i)$  isomorph sind.

Definition 4.1 ( $\overline{\mathcal{V}}_i$ -kompatible Faserhomotopieäquivalenzen von B,  $\overline{\mathcal{V}}_i$ -kompatible Normalen-k-Smoothings auf  $D^i \times M$ ):

Sei  $B \xrightarrow{p} B_0$  der Normalen-k-Typ von M

und  $(\overline{\mathcal{V}}_i: D_+^i \times M \rightarrow B)_{i \in \mathbb{N}}$  eine fest gewählte Familie von

Liften der Gauß-Abbildungen  $(\nu_{D_+^i \times M})_{i \in \mathbb{N}}$  mit den Eigenschaften wie in Definition 2.1.

a) Zwei Faserhomotopieäquivalenzen  $h, h': B \rightarrow B$

mit  $h \circ \overline{\mathcal{V}}_i = \overline{\mathcal{V}}_i$  und  $h' \circ \overline{\mathcal{V}}_i = \overline{\mathcal{V}}_i$  (Gleichheit als Abbildungen, nicht als Äquivalenzklassen von B-Strukturen)

heißen äquivalent, wenn es eine Homotopie von Faserhomotopieäquivalenzen  $H: I \times B \rightarrow B$  gibt, so daß

$H_0 = h$ ,  $H_1 = h'$  und  $H_t \circ \overline{\mathcal{V}}_i = \overline{\mathcal{V}}_i$  für alle  $t \in I$  gilt.

Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit  $\text{Aut}((B,p)\text{rel}\overline{\mathcal{V}}_i)$  bezeichnet.

b) Zwei Normalen-k-Smoothings  $\overline{\nu}, \overline{\nu}': D_+^i xM \longrightarrow B$   
 mit  $\overline{\nu}|_{S^{i-1}xM} = \overline{\nu}_i$  und  $\overline{\nu}'|_{S^{i-1}xM} = \overline{\nu}_i$  (Gleichheit als Abbildungen)  
 heißen äquivalent, wenn es eine Homotopie  
 $H: I \times D_+^i xM \longrightarrow B$  mit  $H_0 = \overline{\nu}$  und  $H_1 = \overline{\nu}'$  gibt, so daß für  
 alle  $t \in I$   $p \circ H_t = \nu|_{D_+^i xM}$  und  $H_t|_{S^{i-1}xM} = \overline{\nu}_i$  gilt.  
 (kurz: wenn  $\overline{\nu}$  und  $\overline{\nu}'$  homotop relativ Rand über  $B_0$  sind.)  
 Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit  $NS_k(D^i xM \text{ rel } \overline{\nu}_i)$   
 bezeichnet.

#### Hilfssatz 4.2:

- a)  $\text{Aut}((B,p)\text{rel}\overline{\nu}_i)$  ist bezüglich der Komposition von  
 Faserhomotopieäquivalenzen eine Gruppe.  
 b) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} : \text{Aut}((B,p)\text{rel}\overline{\nu}_i) &\longrightarrow NS_k(D^i xM \text{ rel } \overline{\nu}_i) \\ h &\longmapsto h \circ \overline{\nu}_i \end{aligned}$$

ist eine Bijektion.

#### Beweis:

Beide Aussagen sind bereits in  $[Kr_1, §7]$  gezeigt worden.  
 q.e.d.

Mit der Bijektion  $\mathfrak{h}$  führen wir auf  $NS_k(D^i xM \text{ rel } \overline{\nu}_i)$   
 eine Gruppenstruktur ein.

Im folgenden Hilfssatz wollen wir diese Gruppenstruktur  
 etwas direkter beschreiben.

#### Hilfssatz 4.3:

- a) Sei  $\overline{D}^i \subset \overline{D}_+^i$  eine beliebige Scheibe.

Jedes Element aus  $NS_k(D^i xM \text{ rel } \overline{\nu}_i)$  läßt sich durch ein

Normalen-k-Smoothing  $\overline{\mathcal{V}}: D_+^i \times M \longrightarrow B$  mit

$\overline{\mathcal{V}}|_{(D_+^i \setminus \overset{\circ}{D}^i) \times M} = \overline{\mathcal{V}}_i|_{(D_+^i \setminus \overset{\circ}{D}^i) \times M}$  repräsentieren.

- b) Seien  $D_1^i \subset \overset{\circ}{D}_+^i$  und  $D_2^i \subset \overset{\circ}{D}_+^i$  zwei disjunkt eingebettete Scheiben.

Wir repräsentieren zwei Elemente in  $NS_k(D^i \times M \text{ rel } \overline{\mathcal{V}}_i)$  durch Normalen-k-Smoothings  $\overline{\mathcal{V}}_{(j)}: D_+^i \times M \longrightarrow B$  mit

$\overline{\mathcal{V}}_{(j)}|_{(D_+^i \setminus \overset{\circ}{D}_j^i) \times M} = \overline{\mathcal{V}}_i|_{(D_+^i \setminus \overset{\circ}{D}_j^i) \times M}$  für  $j = 1, 2$ .

Dann ist durch

$$\overline{\mathcal{V}}: D_+^i \times M \longrightarrow B$$

$$(t, x) \mapsto \begin{cases} \overline{\mathcal{V}}_{(1)}(t, x), & \text{falls } t \in D_1^i \\ \overline{\mathcal{V}}_{(2)}(t, x), & \text{falls } t \in D_2^i \\ \overline{\mathcal{V}}_i(t, x), & \text{falls } t \notin D_1^i \cup D_2^i \end{cases}$$

ein Normalen-k-Smoothing definiert, das

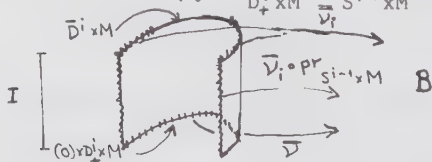
$\overline{\mathcal{V}}_{(1)} \bullet \overline{\mathcal{V}}_{(2)}$  repräsentiert.

Beweis:

Sei  $\overline{\mathcal{V}}: D_+^i \times M \longrightarrow B$  ein beliebiges Normalen-k-Smoothing mit  $\overline{\mathcal{V}}|_{S^{i-1} \times M} = \overline{\mathcal{V}}_i$ .

$$\{0\} \times \overline{\mathcal{V}} \cup \overline{\mathcal{V}}_i \circ \text{pr}_{S^{i-1} \times M} \cup \{1\} \times \overline{\mathcal{V}}_i|_{(D_+^i \setminus \overset{\circ}{D}^i) \times M}: \{0\} \times D_+^i \times M \cup I \times S^{i-1} \times M \cup \{1\} \times (D_+^i \setminus \overset{\circ}{D}^i) \times M \longrightarrow B$$

ist ein Lift von  $\{0\} \times \overline{\mathcal{V}} \cup \overline{\mathcal{V}}_i \circ \text{pr}_{S^{i-1} \times M} \cup \{1\} \times \overline{\mathcal{V}}_i|_{(D_+^i \setminus \overset{\circ}{D}^i) \times M}$ .



Da  $\{0\} \times D_+^i \times M \cup I \times S^{i-1} \times M \cup \{1\} \times (D_+^i \setminus \overset{\circ}{D}^i) \times M$  Deformations-retrakt von  $I \times D_+^i \times M$  ist, läßt sich dieser Lift zu einem

Lift  $\widetilde{\mathcal{V}}: I \times D_+^i \times M \longrightarrow B$  von  $\overline{\mathcal{V}}|_{D_+^i \times M} \circ \text{pr}_{D_+^i \times M}$  ausdehnen.

Für  $\overline{\mathcal{V}}' = \widetilde{\mathcal{V}}|_{\{1\} \times D_+^i \times M}$  gilt  $\overline{\mathcal{V}}'|_{(D_+^i \setminus \overset{\circ}{D}^i) \times M} = \overline{\mathcal{V}}_i|_{(D_+^i \setminus \overset{\circ}{D}^i) \times M}$ ,

und  $\tilde{\mathcal{V}}$  ist eine Homotopie relativ Rand über  $p$  zwischen  $\overline{\mathcal{V}}$  und  $\overline{\mathcal{V}}'$ .

b) Angenommen,  $\overline{\mathcal{V}}_{(j)} : D_+^i \times M \longrightarrow B$ ,  $j = 1, 2$ ,

sind zwei Normalen- $k$ -Smoothings mit  $\overline{\mathcal{V}}_{(j)}|_{(D_+^i \setminus \mathring{D}_j^i) \times M} = \overline{\mathcal{V}}_i|_{(D_+^i \setminus \mathring{D}_j^i) \times M}$ .

Aus 4.2 folgt, daß es Faserhomotopieäquivalenzen

$h_{(j)} : B \rightarrow B$  mit  $h_{(j)} \circ \overline{\mathcal{V}}_i = \overline{\mathcal{V}}_{(j)}$  gibt,  $j = 1, 2$ .

Da  $\overline{\mathcal{V}}_i : D_+^i \times M \longrightarrow B$  eine Kofaserung, also insbesondere injektiv

ist, gilt  $h_{(j)}|_{\overline{\mathcal{V}}_i((D_+^i \setminus \mathring{D}_j^i) \times M)} = \text{Id}$ , und es folgt, daß das Normalen- $k$ -Smoothing  $h_{(1)} \circ h_{(2)} \circ \overline{\mathcal{V}}_i$

auf  $D_+^i \times M$  mit  $\overline{\mathcal{V}}_{(1)}$ , auf  $D_+^i \times M$  mit  $\overline{\mathcal{V}}_{(2)}$  und auf  $(D_+^i \setminus (\mathring{D}_1^i \cup \mathring{D}_2^i)) \times M$  mit  $\overline{\mathcal{V}}_i$  übereinstimmt, d.h.  $h_{(1)} \circ h_{(2)} \circ \overline{\mathcal{V}}_i = \overline{\mathcal{V}}$ .

Also gilt  $\mathcal{A}(h_{(1)} \circ h_{(2)}) = \overline{\mathcal{V}} = \overline{\mathcal{V}}_{(1)} \bullet \overline{\mathcal{V}}_{(2)}$ , da die

Verknüpfung auf  $NS_k(D_+^i \times M \text{ rel } \overline{\mathcal{V}}_i)$  durch  $\mathcal{A}$  induziert ist.

q.e.d.

#### Korollar 4.4:

$\text{Aut}((B, p) \text{ rel } \overline{\mathcal{V}}_i)$  und  $NS_k(D_+^i \times M \text{ rel } \overline{\mathcal{V}}_i)$  sind abelsche Gruppen.

#### Beweis:

Sind  $h_{(j)}$ ,  $\overline{\mathcal{V}}_{(j)}$ ,  $j = 1, 2$ , wie im Beweis von 4.3.b) gegeben,

so gilt  $h_{(1)} \circ h_{(2)} \circ \overline{\mathcal{V}}_i = h_{(2)} \circ h_{(1)} \circ \overline{\mathcal{V}}_i$ , da  $h_{(j)}|_{\overline{\mathcal{V}}_i((D_+^i \setminus \mathring{D}_j^i) \times M)} = \text{Id}$ .

Also gilt  $\overline{\mathcal{V}}_{(1)} \bullet \overline{\mathcal{V}}_{(2)} = \mathcal{A}(h_{(1)} \circ h_{(2)}) = \mathcal{A}(h_{(2)} \circ h_{(1)}) = \overline{\mathcal{V}}_{(2)} \bullet \overline{\mathcal{V}}_{(1)}$ ,

d.h.  $NS_k(D_+^i \times M \text{ rel } \overline{\mathcal{V}}_i)$  ist abelsch.

Da  $\mathcal{A}$  ein Isomorphismus ist, ist auch  $\text{Aut}((B, p) \text{ rel } \overline{\mathcal{V}}_i)$

abelsch.

q.e.d.

Wir kommen nun zum Hauptergebnis dieses Kapitels, einer langen exakten Sequenz zur Bestimmung von Blockdiffeomorphismen.

Dabei arbeiten wir zunächst mit  $NS_k(D^i \times M \text{ rel } \bar{\nu}_i)$  und formulieren anschließend den Satz mit Hilfe von  $\text{Aut}((B, p) \text{ rel } \bar{\nu}_i)$ .

#### Satz 4.5:

Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit.

Dann gibt es eine exakte Sequenz von Gruppen

$$\begin{aligned} NS_k(D^i \times M \text{ rel } \bar{\nu}_i) &\xrightarrow{\alpha_i} NS_k(D^i \times M; \bar{\nu}_i) \xrightarrow{\beta_i} \pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M) \\ &\xrightarrow{\gamma_{i-1}} NS_k(D^{i-1} \times M \text{ rel } \bar{\nu}_{i-1}) \longrightarrow \dots \\ &\longrightarrow NS_k(D^{r(n)} \times M \text{ rel } \bar{\nu}_{r(n)}) \xrightarrow{\alpha_{r(n)}} NS_k(D^{r(n)} \times M; \bar{\nu}_{r(n)}) . \end{aligned}$$

mit  $r(n) = 1$  für  $n \geq 4$ ,  $r(3) = 2$ ,  $r(2) = 3$  und  $r(1) = 4$ .

Bis auf eventuell  $NS_k(D^1 \times M; \bar{\nu}_1)$  sind alle Gruppen abelsch.

#### Beweis:

Zunächst sollen die Abbildungen definiert werden.

a) Definition von  $\alpha_i: NS_k(D^i \times M \text{ rel } \bar{\nu}_i) \longrightarrow NS_k(D^i \times M; \bar{\nu}_i)$ :

$$\alpha_i(\bar{\nu}) = (D_+^i \times M, \bar{\nu}, \text{Id}) .$$

$\alpha_i$  ist wohldefiniert, denn eine Homotopie relativ Rand über  $p: B \rightarrow B^0$  zwischen  $\bar{\nu}$  und  $\bar{\nu}'$  läßt sich unmittelbar als  $s$ -Kobordismus zwischen  $(D_+^i \times M, \bar{\nu}, \text{Id})$  und  $(D_+^i \times M, \bar{\nu}', \text{Id})$  auffassen.

Wir zeigen, daß  $\alpha_i$  ein Homomorphismus ist.

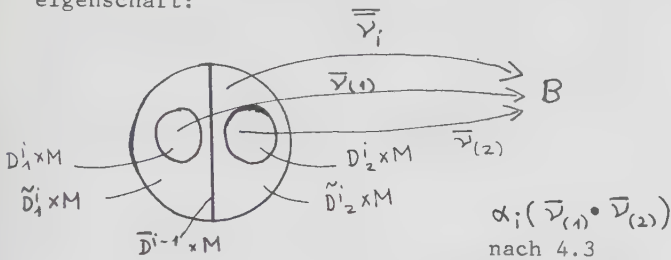
Sei  $\bar{D}^{i-1} \subset D_+^i$  eine Scheibe, die  $D_+^i$  in zwei Hälften

$\tilde{D}_1^i$  und  $\tilde{D}_2^i$  zerlegt.

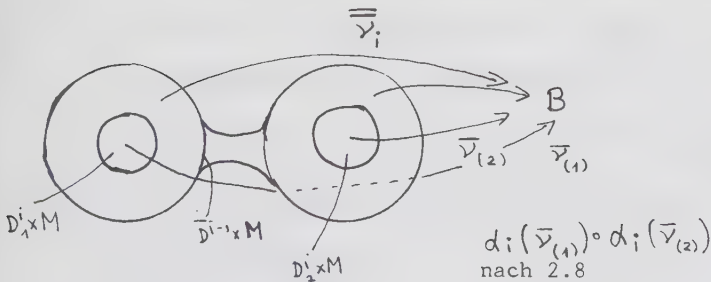
Wir wählen eingebettete Scheiben  $D_j^i \subset \tilde{D}_j^i$ ,  $j = 1, 2$ , und

repräsentieren zwei beliebige Elemente  $\overline{\gamma}_{(1)}$  und  $\overline{\gamma}_{(2)}$  aus  $NS_k(D^i_{xM} \text{ rel } \overline{\gamma}_i)$  so, daß  $\overline{\gamma}_{(i)} \mid (D^i_+ \setminus \tilde{D}^i_j)_{xM} = \overline{\gamma}_i \mid (D^i_+ \setminus \tilde{D}^i_j)_{xM}$  (Hilfssatz 4.3.a)).

Indem wir  $D^i_{xM} = (\tilde{D}^i_1 \cup \tilde{D}^i_2)_{xM} = \tilde{D}^i_1_{xM} \cup \tilde{D}^i_2_{xM}$  mit  $D^i_{xM} \cup_{sl} D^i_{xM}$  identifizieren, folgt nach Definition der Verknüpfung auf  $NS_k(D^i_{xM}; \overline{\gamma}_i)$  in 2.8 die Homomorphie-eigenschaft:



~



b) Definition von  $\beta_i: NS_k(D^i_{xM}; \overline{\gamma}_i) \longrightarrow \pi_{i-1} \widetilde{Diff}(M)$  für  $n+i \geq 6$ :

Jedes relative Normalen-k-Smoothing  $\mathcal{S} \in NS_k(D^i_{xM}; \overline{\gamma}_i)$

läßt sich nach Hilfssatz 2.11 in der Form

$(D^i_{xM}, \overline{\gamma}, f)$  repräsentieren, wobei  $f: S^{i-1}_{xM} \longrightarrow S^{i-1}_{xM}$

ein Diffeomorphismus mit  $f|_{D^{i-1}_{xM}} = \text{Id}$  ist.

Wir definieren  $\beta_i$  durch  $\beta_i(\mathcal{S}) = [f]$ .

Es soll nun die Wohldefiniertheit von  $\beta_i$  gezeigt werden.

Sei  $(D_+^{i-1}xM, \bar{v}, f) \sim (D_+^{i-1}xM, \bar{v}', f')$  ( $f|_{D_-^{i-1}xM} = \text{Id}$ ,  $f'|_{D_-^{i-1}xM} = \text{Id}$ ) und  $(W, \bar{v}_W, \bar{f})$  ein zugehöriger s-Kobordismus.

Aus dem relativen s-Kobordissatz folgt, daß sich

$(f^{-1} \times \text{Id}) \circ \bar{f}: U \longrightarrow S^{i-1}xM \times I$  zu einem Diffeomorphismus

$F: W \longrightarrow D_+^{i-1}xM \times I$  fortsetzen läßt mit  $F|_{(D_+^{i-1}xM)_0} = \text{Id}$ .

Die Einschränkung von F auf  $(D_+^{i-1}xM)_1$  liefert einen

Diffeomorphismus  $D_+^{i-1}xM \longrightarrow D_+^{i-1}xM$ , der  $f^{-1} \circ f'$  fortsetzt.

$((D_+^{i-1}xM)_j = F^{-1}(D_+^{i-1}xM \times \{j\}), j=0,1)$

Also gilt  $[f] = [f']$  in  $\pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M)$ , d.h.  $\beta_i$  ist wohldefiniert.

Zum Beweis der Homomorphieeigenschaft von  $\beta_i$  formulieren wir folgende etwas technische Zwischenbehauptung.

Sei  $D_+^{i-1} = \tilde{D}_1^{i-1} \cup \tilde{D}_2^{i-1}$  die Zerlegung von  $D_+^{i-1}$  in zwei Hälften.

Mit  $V \cong S^{i-1}xM \times I$  bezeichnen wir eine Kragenumgebung von  $S^{i-1}xM$  in  $D_+^{i-1}xM$ .

Sei  $D_j^{i-1} \subset \tilde{D}_j^{i-1}$  eine differenzierbar eingebettete Scheibe und  $\bar{D}^{i-1} \subset D_+^{i-1}$  eine differenzierbar eingebettete Scheibe mit  $\partial \bar{D}^{i-1}xM \subset V$ .

Ferner sei  $T_j': D_j^{i-1} \rightarrow \bar{D}^{i-1}$

ein Diffeomorphismus und

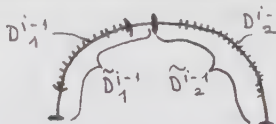
$T_j = T_j' \times \text{Id}_M: D_j^{i-1}xM \rightarrow \bar{D}^{i-1}xM$ .

Ein Element in  $\pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M)$  läßt sich durch einen

Diffeomorphismus  $f: D_+^{i-1}xM \rightarrow D_+^{i-1}xM$  mit  $f|_V = \text{Id}$  repräsentieren.

Wir definieren  $\tilde{f}_{(j)}: D_+^{i-1}xM \rightarrow D_+^{i-1}xM$  durch

$$(t, x) \mapsto \begin{cases} T_j^{-1} \circ f \circ T_j(t, x), & \text{falls } t \in D_j^{i-1} \\ (t, x) & , \text{ falls } t \notin D_j^{i-1} \end{cases}$$



Behauptung:  $\tilde{f}_{(j)}$  ist ein Diffeomorphismus und es gilt  $[\tilde{f}_{(j)}] = [f]$  in  $\pi_{i-1}\widehat{\text{Diff}}(M)$ .

Begründung: Da  $f|_V = \text{Id}$ , stimmt  $T_j^{-1} \circ f \circ T_j$  in einer Umgebung von  $\partial D_j^{i-1} \times M$  in  $D_+^{i-1} \times M$  mit der Identität überein.

Daraus folgt, daß  $\tilde{f}_{(j)}$  ein Diffeomorphismus ist.

Nach dem Disk-Lemma gibt es eine Isotopie  $h: \text{IxD}_+^{i-1} \rightarrow D_+^{i-1}$  mit  $h_0 = \text{Inklusion } (D_j^{i-1} \hookrightarrow D_+^{i-1})$  und  $h_1 = T_j^!$ , die wir in eine Diffeotopie  $H: \text{IxD}_+^{i-1} \rightarrow D_+^{i-1}$  einbetten.

d.h.  $H_0 = \text{Id}$ ,  $H_t|_{D_+^{i-1}} = h_t$ .

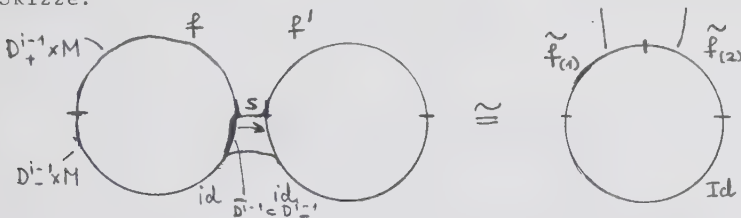
Dann ist  $F: \text{IxD}_+^{i-1} \times M \rightarrow \text{IxD}_+^{i-1} \times M$

$$(s, t, x) \longmapsto (s, (H_s \times \text{Id})^{-1} \circ f \circ (H_s \times \text{Id})(t, x))$$

eine Konkordanz zwischen  $f$  und  $\tilde{f}_{(j)}$ , d.h.  $[f] = [\tilde{f}_{(j)}]$ .

Wir repräsentieren nun  $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \text{NS}_k(D_+^i \times M; \bar{V}_1)$  in der Form  $(D_+^i \times M, \bar{V}, f)$  und  $(D_+^i \times M, \bar{V}', f')$  mit  $(f|_{D_+^{i-1} \times M})|_V = \text{Id}$  und  $(f'|_{D_+^{i-1} \times M})|_V = \text{Id}$ .

Die Homorphieeigenschaft von  $\beta_1$  entnimmt man nun folgender Skizze:



Erläuterung: Wir wählen zur Bildung der Verknüpfung  $\mathcal{S} \circ \mathcal{S}'$   $\bar{D}_-^{i-1} \subset D_-^{i-1}$  (Siehe 2.8) und identifizieren mittels eines Diffeomorphismus  $D_+^i \times M \cup_S D_+^i \times M$  mit  $D_+^i \times M$  der Art, daß auf dem Rand  $D_+^{i-1} \times M \cup_{S|_L} D_+^{i-1} \times M$  mit  $D_+^{i-1} \times M$  identifiziert wird. Die Identifikation auf diesem Teil des Randes wird von  $T_1^{-1} \cup T_2^{-1}$  induziert.

Auf  $S^{i-1} \times M$  erhalten wir den Diffeomorphismus

$(\tilde{f}_{(1)} \circ \tilde{f}_{(2)}) \cup \text{Id}_{D^{i-1} \times M}$ . Also folgt

$$\begin{aligned} \beta_i(\gamma \circ \gamma') &= \left[ (\tilde{f}_{(1)} \circ \tilde{f}_{(2)}) \cup \text{Id}_{D^{i-1} \times M} \right] = \left[ \tilde{f}_{(1)} \cup \text{Id}_{D^{i-1} \times M} \right] \circ \left[ \tilde{f}_{(2)} \cup \text{Id}_{D^{i-1} \times M} \right] \\ &= [f] [f'] = \beta_i(\gamma) \circ \beta_i(\gamma'). \end{aligned}$$

c) Definition von  $\gamma_i: \widetilde{\pi_i \text{Diff}(M)} \longrightarrow \text{NS}_k(D^i \times M \text{ rel } \overline{\gamma}_i)$ :

Ein Element in  $\widetilde{\pi_i \text{Diff}(M)}$  läßt sich durch einen Diffeomorphismus

$f: D_+^i \times M \longrightarrow D_+^i \times M$  mit  $f|_{S^{i-1} \times M} = \text{Id}$  repräsentieren.

Dann ist  $f^* \overline{\gamma}_i: D_+^i \times M \rightarrow B$  ein Normalen-k-Smoothing,

das auf  $S^{i-1} \times M$  mit  $\overline{\gamma}_i$  übereinstimmt.

Definiere  $\gamma_i$  durch  $\gamma_i(f) = f^* \overline{\gamma}_i$ .

Ist  $F: D_+^i \times M \times I \longrightarrow D_+^i \times M \times I$  eine Konkordanz relativ Rand zwischen  $f$  und  $f'$ , so ist  $F^* \overline{\gamma}_i$  eine Homotopie relativ Rand zwischen  $f^* \overline{\gamma}_i$  und  $f'^* \overline{\gamma}_i$ . Also ist  $\gamma_i$  wohldefiniert.

Zur Homomorphieeigenschaft: Sind zwei Elemente in  $\widetilde{\pi_i \text{Diff}(M)}$  gegeben, so lassen sich diese durch Diffeomorphismen

$f, f': D_+^i \times M \longrightarrow D_+^i \times M$  repräsentieren, so daß  $f|_{(D_+^i \setminus D_1^i) \times M} = \text{Id}$  und  $f'|_{(D_+^i \setminus D_2^i) \times M} = \text{Id}$ , wobei  $D_1^i, D_2^i \subset D_+^i$  disjunkt eingebettete Scheiben. (Vgl. die Zwischenbehauptung auf Seite 58, 59)

Dann gilt  $f^* \overline{\gamma}_i|_{(D_+^i \setminus D_1^i) \times M} = \overline{\gamma}_i|_{(D_+^i \setminus D_1^i) \times M}$  und

$f'^* \overline{\gamma}_i|_{(D_+^i \setminus D_2^i) \times M} = \overline{\gamma}_i|_{(D_+^i \setminus D_2^i) \times M}$ .

Aus Hilfssatz 4.3 folgt unmittelbar

$(f \circ f')^* \overline{\gamma}_i = (f^* \overline{\gamma}_i) \circ (f'^* \overline{\gamma}_i)$ , d.h.  $\gamma_i$  ist ein Homomorphismus.

(A) Exaktheit an der Stelle  $NS_k(D^i_{xM} \text{ rel } \overline{\nu}_i)$ :

Sei  $f: D^i_{+xM} \longrightarrow D^i_{+xM}$  ein Diffeomorphismus mit  $f|_{S^{i-1}_M} = \text{Id}$ .

Dann gilt  $\alpha_i \gamma_i(f) = (D^i_{+xM}, f^* \overline{\nu}_i, \text{Id})$ .  $f$  ist ein Diffeomorphismus zwischen  $(D^i_{+xM}, f^* \overline{\nu}_i, \text{Id})$  und  $(D^i_{+xM}, \overline{\nu}_i, \text{Id})$ , d.h.  $\alpha_i \gamma_i(f) = 0$  nach Hilfssatz 2.7. Damit ist  $\text{Bild } \gamma_i \subset \text{Kern } \alpha_i$  bereits gezeigt.

Sei umgekehrt  $\overline{\nu}: D^i_{+xM} \longrightarrow B$  ein  $\overline{\nu}_i$ -kompatibles Normalen-  
-k-Smoothing, so daß  $\alpha_i(\overline{\nu}) = (D^i_{+xM}, \overline{\nu}, \text{Id})$  trivial ist.

Dann gibt es einen s-Kobordismus  $(W, \overline{\nu}_W, \overline{f})$  zwischen

$(D^i_{+xM}, \overline{\nu}, \text{Id})$  und  $(D^i_{+xM}, \overline{\nu}_i, \text{Id})$ . Insbesondere gilt

$\partial W = \{0\} \times D^i_{+xM} \cup U \cup \{1\} \times D^i_{+xM}$ , und  $\overline{f}: U \longrightarrow I \times S^{i-1}_{xM}$

ist ein Diffeomorphismus mit  $\overline{f}|_{\partial U} = \text{Id}$  und  $\overline{f}^* \overline{\nu}_i \circ \text{Pr}_{S^{i-1}_{xM}} = \overline{\nu}_W|_U$ .

Aus dem relativen s-Kobordismus-Satz folgt, daß sich

$\text{Id}|_{\{0\} \times D^i_{+xM}} \cup \overline{f}^{-1}: \{0\} \times D^i_{+xM} \cup I \times S^{i-1}_{xM} \longrightarrow W$

zu einem Diffeomorphismus

$F: (I \times D^i_{+xM}, \{1\} \times D^i_{+xM}) \longrightarrow (W, \{1\} \times D^i_{+xM})$  fortsetzen läßt.

Sei  $F_1 = F|_{\{1\} \times D^i_{+xM}}$ .

$\overline{\nu}_W$  induziert einen Lift  $F^* \overline{\nu}_W: I \times D^i_{+xM} \longrightarrow B$  von  $\nu_{D^i_{+xM}} \circ \text{Pr}_{D^i_{+xM}}$   
mit  $F^* \overline{\nu}_W|_{\{0\} \times D^i_{+xM}} = \overline{\nu}$ ,  $F^* \overline{\nu}_W|_{I \times S^{i-1}_{xM}} = \overline{\nu}_i \circ \text{Pr}_{S^{i-1}_{xM}}$

und  $F^* \overline{\nu}_W|_{\{1\} \times D^i_{+xM}} = F_1^* \overline{\nu}_i$ .

Also ist  $F^* \overline{\nu}_W$  eine Homotopie relativ Rand über  $B_0$  zwischen

$\overline{\nu}$  und  $F_1^* \overline{\nu}_i = \gamma_i(F_1)$ , d.h.  $\overline{\nu} \in \text{Bild } \gamma_i$ .

Damit ist  $\text{Kern } \alpha_i \subset \text{Bild } \gamma_i$  gezeigt.

(B) Exaktheit an der Stelle  $NS_k(D^i_{xM}; \overline{\nu}_i)$ :

Sei  $\overline{\nu} \in NS_k(D^i_{xM} \text{ rel } \overline{\nu}_i)$ . Dann gilt  $\beta_i \alpha_i(\overline{\nu}) = \beta_i(D^i_{+xM}, \overline{\nu}, \text{Id})$

$= [\text{Id}]$ , d.h.  $\text{Bild } \alpha_i \subset \text{Kern } \beta_i$ .

Sei umgekehrt  $\gamma \in NS_k(D^i_{xM}; \overline{\nu}_i)$  mit  $\beta_i(\gamma) = [\text{Id}]$  gegeben.

$\mathcal{A}$  kann in der Form  $(D_+^{i-1} \times M, \bar{\nu}, f)$  mit  $f|_{D_+^{i-1} \times M} = \text{Id}$  repräsentiert werden. Aus  $\beta_i(\mathcal{A}) = [\text{Id}]$  folgt, daß sich  $f: S^{i-1} \times M \longrightarrow S^{i-1} \times M$  zu einem Diffeomorphismus  $F: D_+^{i-1} \times M \longrightarrow D_+^{i-1} \times M$  fortsetzen läßt. Nach Hilfssatz 2.7 ist  $\mathcal{A}$  äquivalent zu  $(D_+^{i-1} \times M, (F^{-1})^* \bar{\nu}, \text{Id})$ . Also gilt  $\mathcal{A} = \alpha_i((F^{-1})^* \bar{\nu})$ , womit Kern  $\beta_i \subset \text{Bild } \alpha_i$  gezeigt ist.

### (C) Exaktheit an der Stelle $\widetilde{\pi}_{i-1} \text{Diff}(M)$ :

Sei  $\mathcal{A} = (D_+^{i-1} \times M, \bar{\nu}, f)$  ein relatives Normalen-k-Smoothing mit  $f|_{D_+^{i-1} \times M} = \text{Id}$ . Es gilt  $\gamma_{i-1} \circ \beta_i(\mathcal{A}) = (f|_{D_+^{i-1} \times M})^* \bar{\nu}_{i-1}$ . Wir zeigen, wie sich mit Hilfe von  $\bar{\nu}$  eine Homotopie relativ Rand über  $BO$  zwischen  $\gamma_{i-1} \circ \beta_i(\mathcal{A}) = \bar{\nu}|_{D_+^{i-1} \times M}$  und  $\bar{\nu}_{i-1}$  konstruieren läßt.

Sei dazu  $\phi: I \times D_+^{i-1} \times M \longrightarrow D_+^{i-1} \times M$  durch

$$(t; t_1, \dots, t_{i-1}; x) \mapsto (t_1, \dots, t_{i-1}, t_i \cos \pi t, t_i \sin \pi t; x)$$

gegeben.



Es gilt  $\phi|_{\{0\} \times D_+^{i-1} \times M} = \text{Id}$ ,  $\phi|_{I \times S^{i-2} \times M} = \text{Pr}_{S^{i-2} \times M}$  und  $\phi|_{\{1\} \times D_+^{i-1} \times M} = s: D_+^{i-1} \times M \longrightarrow D_+^{i-1} \times M$ ,  
 $(t_1, \dots, t_{i-1}; x) \mapsto (t_1, \dots, t_{i-1}, -t_i; x)$

$\nu_{D_+^{i-1} \times M} \circ \phi$  ist homotop zu  $\nu_{D_+^{i-1} \times M} \circ \text{Pr}_{D_+^{i-1} \times M}$  relativ  $\{0\} \times D_+^{i-1} \times M \cup I \times S^{i-2} \times M$ .

Sei  $H: J \times I \times D_+^{i-1} \times M \longrightarrow BO$  solch eine Homotopie mit

$$H_0 = \nu_{D_+^{i-1} \times M} \circ \phi \text{ und } H_1 = \nu_{D_+^{i-1} \times M} \circ \text{Pr}_{D_+^{i-1} \times M}. \quad (J = [0, 1])$$

Wir heben diese Homotopie zu einer Homotopie

$$\bar{H}: J \times I \times D_+^{i-1} \times M \longrightarrow B \text{ hoch, so daß } \bar{H}_0 = \bar{\nu} \circ \phi,$$

$$\bar{H}_s|_{\{0\} \times D_+^{i-1} \times M} = \bar{\nu}|_{D_+^{i-1} \times M} = (f|_{D_+^{i-1} \times M})^* \bar{\nu}_{i-1} \text{ und}$$

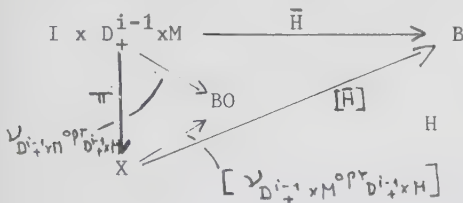
$$\bar{H}_s|_{I \times S^{i-2} \times M} = \bar{\nu}_{i-1} \circ \text{Pr}_{S^{i-2} \times M}.$$

$\bar{H}_1: \{1\} \times I \times D_+^{i-1} \times M \longrightarrow B$  ist dann eine Homotopie relativ Rand über  $p: B \rightarrow B_0$  zwischen  $\bar{\nu}|_{D_+^{i-1} \times M} = (f|_{D_+^{i-1} \times M})^* \bar{\nu}_{i-1}$  und  $s^*(\bar{\nu}|_{D_-^{i-1} \times M})$ .  $s^*(\bar{\nu}|_{D_-^{i-1} \times M})$  ist jedoch homotop relativ Rand zu  $\bar{\nu}|_{D_+^{i-1} \times M} = \bar{\nu}_{i-1}$ . Also sind  $(f|_{D_-^{i-1} \times M})^* \bar{\nu}_{i-1}$  und  $\bar{\nu}_{i-1}$  homotop relativ Rand über  $p: B \rightarrow B_0$ .

Sei umgekehrt eine Homotopie  $\bar{H}: I \times D_+^{i-1} \times M \longrightarrow B$  zwischen  $(f|_{D_+^{i-1} \times M})^* \bar{\nu}_{i-1}$  und  $\bar{\nu}_{i-1}$  gegeben.

Sei  $X = I \times D_+^{i-1} \times M / (s, t, x) \sim (s', t, x) \forall t \in \partial D_+^{i-1}$

Man erhält ein kommutatives Diagramm



und  $\phi$  induziert einen Homöomorphismus  $\bar{\phi}: X \longrightarrow D_+^i \times M$ .

Indem man wie bei "Bild  $\beta_i \subset \text{Kern } \gamma_{i-1}$ " eine Homotopie relativ  $D_+^{i-1} \times M$  zwischen  $[\nu_{D_+^{i-1} \times M} \circ \text{pr}_{D_+^{i-1} \times M}] \circ \bar{\phi}^{-1}$  und  $\nu_{D_+^i \times M}$  geeignet nach  $B$  mit Anfangsliift  $[H] \circ \bar{\phi}^{-1}$  hochhebt, erhält man eine  $B$ -Struktur  $\bar{\nu}: D_+^i \times M \longrightarrow B$  mit  $\bar{\nu}|_{D_+^{i-1} \times M} = (f|_{D_+^{i-1} \times M})^* \bar{\nu}_{i-1}$  und  $\bar{\nu}|_{D_-^{i-1} \times M} = (s^{-1})^* \bar{\nu}_{i-1}$ , und daraus folgt  $\bar{\nu}|_{S^i \times M} = f^* \bar{\nu}_i$ . Also ist  $(D_+^i \times M, \bar{\nu}, f)$  ein relatives Normalen-k-Smoothig mit  $\beta_i(D_+^i \times M, \bar{\nu}, f) = [f]$ , d.h. Kern  $\gamma_{i-1} \subset \text{Bild } \beta_i$ .

q.e.d.

Wir ersetzen nun mit Hilfe des Isomorphismus

$\mathcal{H}: \text{Aut}((B, p) \text{ rel } \bar{\nu}_i) \longrightarrow \text{NS}_k(D^i \times M \text{ rel } \bar{\nu}_i)$  (Hilfssatz 4.2) in der Sequenz 4.5  $\text{NS}_k(D^i \times M \text{ rel } \bar{\nu}_i)$  durch  $\text{Aut}((B, p) \text{ rel } \bar{\nu}_i)$ .

Satz 4.5':

Sei  $M$  eine geschlossene  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und für  $k \in \mathbb{N}$   $B \xrightarrow{P} B_0$  der Normalen- $k$ -Typ von  $M$ .

Dann gibt es eine exakte Sequenz von Gruppen

$$\begin{aligned} \longrightarrow \text{Aut}((B,p)\text{rel}\overline{\nu}_1) &\xrightarrow{\alpha_1} \text{NS}_k(D^1_{+}xM; \overline{\nu}_1) \xrightarrow{\beta_1} \widetilde{\pi}_{1-1} \widetilde{\text{Diff}}(M) \\ &\xrightarrow{\gamma_{1-1}} \text{Aut}((B,p)\text{rel}\overline{\nu}_{1-1}) \longrightarrow \dots \\ &\longrightarrow \widetilde{\pi}_{r(n)} \widetilde{\text{Diff}}(M) \xrightarrow{\delta_{r(n)}} \text{Aut}((B,p)\text{rel}\overline{\nu}_{r(n)}) \\ &\xrightarrow{\epsilon_{r(n)}} \text{NS}_k(D^{r(n)}_{+}xM; \overline{\nu}_{r(n)}) , \end{aligned}$$

wobei  $r(n) = 1$  für  $n \geq 4$ ,  $r(3) = 2$ ,  $r(2) = 3$  und  $r(1) = 4$ .

$\alpha_i$  ist durch  $\alpha_i(h) = (D^1_{+}xM, h \circ \overline{\nu}_i, \text{Id})$ ,

$\beta_i$  durch  $\beta_i(D^1_{+}xM, \overline{\nu}, f) = [f]$  (Vgl. Hilfssatz 2.11)

und  $\gamma_{i-1}$  durch  $\gamma_{i-1}(f) \circ \overline{\nu}_{i-1} = (f|_{D^{1-1}_{+}xM})^* \overline{\nu}_{i-1}$  gegeben.

Alle Gruppen bis auf eventuell  $\text{NS}_k(D^1_{+}xM; \overline{\nu}_1)$  sind abelsch.

q.e.d.

Wir wollen die Sequenz 4.5' für  $n \geq 5$  weiter nach rechts fortsetzen.

Für  $n \geq 5$  ist  $\beta_1: \text{NS}_k(D^1_{+}xM; \overline{\nu}_1) \rightarrow \widetilde{\pi}_0 \widetilde{\text{Diff}}(M)$  definiert.

Sei  $\text{Aut}(B,p)$  die Gruppe der Homotopieklassen über  $B_0$  von Faserhomotopieäquivalenzen von  $B$ . Ist  $f: M \rightarrow M$  ein

Diffeomorphismus, so gibt es eine bis auf Faserhomotopie

eindeutig bestimmte Faserhomotopieäquivalenz  $h_f: B \rightarrow B$

mit  $h_f \circ \overline{\nu}_M = f^* \overline{\nu}_M$  [Kr<sub>1</sub>, §7].  $h_f$  hängt nur von der Pseudo-

isotopieklasse von  $f$  ab. Aus  $(f \circ g)^* \overline{\nu}_M = g^* f^* \overline{\nu}_M$  folgt

$h_{f \circ g} = h_g \circ h_f$ . Definiert man  $\gamma_0(f) = h_f^{-1}$ , so ist

$\gamma_0: \widetilde{\pi}_0 \widetilde{\text{Diff}}(M) \rightarrow \text{Aut}(B,p)$  ein Gruppenhomomorphismus.

Satz 4.5'a): Sei  $n \geq 5$ . Dann ist die Sequenz

$$\text{Aut}((B,p)\text{rel}\overline{\nu}_1) \xrightarrow{\alpha_1} \text{NS}_k(D^1_{+}xM; \overline{\nu}_1) \xrightarrow{\beta_1} \widetilde{\pi}_0 \widetilde{\text{Diff}}(M) \xrightarrow{\gamma_0} \text{Aut}(B,p)$$

exakt.

Beweis: Die Exaktheit an der Stelle  $NS_k(D^1_{xM}; \bar{\nu}_1)$  folgt wie unter 4.5.B).  $f \in \text{Kern } \mathcal{Y}_0$  ist gleichbedeutend damit, daß  $f^* \bar{\nu}_M$  und  $\bar{\nu}_M$  homotop über  $BO$  sind. Der Beweis der Exaktheit an der Stelle  $\pi_0 \widetilde{\text{Diff}}(M)$  ergibt sich damit wie unter 4.5.C).  
q.e.d.

Bemerkung 4.6: Sei  $n \geq 5$ .

Durch  $\text{Aut}(B, p) \xrightarrow{\mathcal{Y}_0} NS_{n,k}^B \longrightarrow \mathcal{M}_{n,k}^B$  läßt sich die Sequenz noch weiter nach rechts fortsetzen. Dabei ist  $\mathcal{M}_{n,k}^B$  die Menge der Diffeomorphieklassen von Mannigfaltigkeiten des Normalen-k-Typs  $B$  (Vgl.  $[Kr_1, \text{Prop.7.4}]$ ).

Der Rest dieses Kapitels beschäftigt sich mit der Berechnung von  $\text{Aut}((B, p) \text{rel } \bar{\nu}_1)$ .

Sei  $M$  mit einer festen CW-Struktur versehen.

Da der Normalen-k-Typ von  $M$   $B \xrightarrow{p} BO$  der k-te Schritt einer Postnikov-Zerlegung von  $\mathcal{V}_{D^1_{xM}}$  ist, ist ein  $\bar{\nu}_1$ -kompatibles Normalen-k-Smoothing  $\bar{\nu}: D^1_{xM} \longrightarrow B$  durch Angabe auf dem  $(k+1)$ -Gerüst bestimmt, und wegen  $(D^1_{xM})^{(k+1)} = \{t_0\} \times M^{(k+1)} \cup_{S^{i-1} \times M^{(k-i+2)}} D^1_{xM}^{(k-i+1)}$  sogar bereits durch Angabe auf  $D^1_{xM}^{(k-i+1)}$ .

Deshalb ist es naheliegend,  $\text{Aut}((B, p) \text{rel } \bar{\nu}_1)$  mit den Homotopieklassen von Abbildungen  $f: D^1_{xM}^{(k-i+1)} \longrightarrow B$  mit  $f|_{S^{i-1} \times M^{(k-i+1)}} = \bar{\nu}_1|_{S^{i-1} \times M^{(k-i+1)}}$  zu vergleichen.

Im folgenden bezeichnen wir für zwei topologische Räume  $Z$  und  $A$  die Menge der stetigen Abbildungen von  $A$  nach  $Z$  wie üblich mit  $Z^A$ . Wir versehen  $Z^A$  mit der kompakt-erzeugten Topologie (Siehe  $[Wh. \text{Chap.1}, \S 4]$ ).

Satz 4.7:

Sei  $B \xrightarrow{P} BO$  der Normalen-k-Typ von M.

M sei mit einer festen CW-Struktur versehen.

Für ein fest gewähltes  $i \in \mathbb{N}$  bezeichnen wir das  $(k-i+1)$ -Gerüst von M kurz mit  $X$  und  $\bar{\nu}_M|_X$ , bzw.  $\nu_M|_X$  mit  $\bar{\nu}_X$ , bzw.  $\nu_X$ .

Dann gibt es eine exakte Sequenz von Gruppen

$$(*) \quad \begin{array}{ccccc} \pi_{i+1}(B^X; \bar{\nu}_X) & \xrightarrow{\hat{P}_*} & \pi_{i+1}(BO^X; \nu_X) & \longrightarrow & \text{Aut}((B, p) \text{rel } \bar{\nu}_i) \\ & & \longrightarrow & & \\ & & \pi_i(B^X; \bar{\nu}_X) & \xrightarrow{\hat{P}_*} & \pi_i(BO^X; \nu_X) \end{array} .$$

$\pi_j(BO^X; \nu_X)$  ist isomorph zu  $[\Sigma^j X_+, BO] \cong \widetilde{KO}(\Sigma^j X_+)$ .

Läßt sich  $B^X$  mit der Struktur einer H-Gruppe versehen, so daß

$c: B^X \rightarrow B^X$ ,  $f \mapsto c_{z_0}$  ( $c_{z_0}(x) = z_0$  konstante Abbildung)

homotopie-neutrales Element der H-Raum-Operation ist, so

ist  $\pi_j(B^X; \bar{\nu}_X)$  isomorph zu  $[\Sigma^j X_+, B]$ .

Ist  $\hat{p}: B^X \rightarrow BO^X$ ,  $f \mapsto p \circ f$  zusätzlich eine H-Raum-Abbildung

(wobei die H-Raum-Struktur auf  $BO^X$  durch die übliche

H-Raum-Struktur auf  $BO$  induziert ist), so erhalten wir

eine exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccc} [\Sigma^{i+1} X_+, B] & \xrightarrow{P_*} & [\Sigma^{i+1} X_+, BO] & \longrightarrow & \text{Aut}((B, p) \text{rel } \bar{\nu}_i) \\ & & \longrightarrow & & \\ & & [\Sigma^i X_+, B] & \xrightarrow{P_*} & [\Sigma^i X_+, BO] \end{array} .$$

Beweis:

Sei für  $j = i, i+1$   $[D_+^j xX, B]_{\bar{\nu}_j}$  die Menge der Homotopieklassen relativ  $S^{j-1}xX$  von Abbildungen  $f: D_+^j xX \rightarrow B$  mit

$f|_{S^{j-1}xX} = \bar{\nu}_j|_{S^{j-1}xX}$  und  $[D_+^j xX, BO]_{\nu_j}$  die Menge der

Homotopieklassen relativ  $S^{j-1}xX$  von Abbildungen  $g: D_+^j xX \rightarrow BO$

mit  $g|_{S^{j-1}xX} = \nu_{S^{j-1}xM}|_{S^{j-1}xX} =: \nu_j$ .

Eine Verknüpfung entsprechend der in Hilfssatz 4.3 macht

$[D_{+}^j \times X, B]_{\bar{\nu}_j}$  bzw.  $[D_{+}^j \times X, BO]_{\nu_j}$  zu abelschen Halbgruppen

mit neutralem Element  $\bar{\nu}_j|_{D_{+}^j \times X}$ , bzw.  $\nu_{D_{+}^j \times M}|_{D_{+}^j \times X}$ .

Für  $\bar{\nu}_j|_{D_{+}^j \times X}$  schreiben wir wieder  $\bar{\nu}_j$  und für  $\nu_{D_{+}^j \times M}|_{D_{+}^j \times X}$   $\nu_j'$ .

(Es wird sich im Laufe dieses Beweises zeigen, daß  $[D_{+}^j \times X, B]_{\bar{\nu}_j}$  und  $[D_{+}^j \times X, BO]_{\nu_j}$  Gruppen sind.)

(1) Als ersten Schritt zur Herleitung der Sequenz (\*)

zeigen wir:

Es gibt eine exakte Sequenz

$$(**) \quad [D_{+}^{i+1} \times X, B]_{\bar{\nu}_{i+1}} \xrightarrow{P_*} [D_{+}^{i+1} \times X, BO]_{\nu_{i+1}} \longrightarrow \text{Aut}((B, p) \text{ rel } \bar{\nu}_i) \\ \longrightarrow [D_{+}^i \times X, B]_{\bar{\nu}_i} \xrightarrow{P_*} [D_{+}^i \times X, BO]_{\nu_i}.$$

Sei  $B^{D_{+}^i \times X, \bar{\nu}_i}$  der Raum der stetigen Abbildungen  $f: D_{+}^i \times X \longrightarrow B$

mit  $f|_{S^{i-1} \times X} = \bar{\nu}_i|_{S^{i-1} \times X}$ .

$BO^{D_{+}^i \times X, \nu_i}$  sei analog definiert.

Die Abbildung  $\hat{p}: B^{D_{+}^i \times X, \bar{\nu}_i} \longrightarrow BO^{D_{+}^i \times X, \nu_i}$

$$f \longmapsto p \circ f$$

ist eine Faserung. Das folgt unmittelbar aus dem relativen

Homotopie-Hochhebungssatz für die Faserung  $B \xrightarrow{P} BO$

(Siehe z.B. [Spa, Chap. 7, Thm. 9]).

Die Faser über  $\nu_i'$ , die wir kurz mit  $\mathcal{F}_i$  bezeichnen wollen,

ist der Raum der stetigen Abbildungen  $f: D_{+}^i \times X \longrightarrow B$  mit

$p \circ f = \nu_i'$  und  $f|_{S^{i-1} \times X} = \bar{\nu}_i|_{S^{i-1} \times X}$ .

Dann ist die Abbildung

$$\mathcal{H}^i: \text{Aut}((B, p) \text{ rel } \bar{\nu}_i) \longrightarrow \pi_0(\mathcal{F}_i)$$

$$h \longmapsto h \circ \bar{\nu}_i|_{D_{+}^i \times X}$$

ein Isomorphismus.

Begründung:  $\pi_0(\mathcal{F}_i)$  ist die Menge der Homotopieklassen relativ

$S^{i-1} \times X$  über  $BO$  von Abbildungen  $f: D_{+}^i \times X \longrightarrow B$  mit  $f|_{S^{i-1} \times X} = \bar{\nu}_i$

und  $p \circ f = \nu_i'$ .

Wegen  $(D_{+}^{i \times M})^{(k+1)} = D_{+}^{i \times X} \cup S^{i-1 \times M^{(k-i+2)}} \cup \{t_0\} \times M^{(k+1)}$

entsteht  $D_{+}^{i \times M}$  durch Anheften von Zellen der Dimension  $q > k+1$  an  $D_{+}^{i \times X} \cup S^{i-1 \times M}$ .

Repräsentiert  $f: D_{+}^{i \times X} \rightarrow B$  ein Element in  $\pi_0(\mathcal{F}_i)$ , so läßt sich  $f \cup \bar{\nu}_i: D_{+}^{i \times X} \cup S^{i-1 \times M} \rightarrow B$  eindeutig als Lift von  $\nu_{D_{+}^{i \times M}}$  auf  $D_{+}^{i \times M}$  fortsetzen, da  $B \xrightarrow{p} B_0$  der  $k$ -te Schritt einer Postnikov-Zerlegung von  $\nu_{D_{+}^{i \times M}}: D_{+}^{i \times M} \rightarrow B_0$  ist.

Daraus folgt, daß  $\ell: NS_k(D_{+}^{i \times M} \text{ rel } \bar{\nu}_i) \rightarrow \pi_0(\mathcal{F}_i)$

$$\nu \longmapsto \bar{\nu}|_{D_{+}^{i \times X}}$$

ein Isomorphismus ist, und mit der Isomorphie

$$\text{Aut}((B, p) \text{ rel } \bar{\nu}_i) \xrightarrow{\cong} NS_k(D_{+}^{i \times M} \text{ rel } \bar{\nu}_i) \quad (\text{Hilfssatz 4.2})$$

folgt, daß  $\mathcal{V}_i' = \ell \circ \mathcal{V}_i: \text{Aut}((B, p) \text{ rel } \bar{\nu}_i) \rightarrow \pi_0(\mathcal{F}_i)$  ein Isomorphismus ist.

Aus der Faserhomotopiesequenz von

$$\mathcal{F}_i \longrightarrow B^{D_{+}^{i \times X}, \bar{\nu}_i} \xrightarrow{\hat{p}} B_0^{D_{+}^{i \times X}, \nu_i}$$

erhalten wir zusammen mit  $\pi_0(B^{D_{+}^{i \times X}, \bar{\nu}_i}) = [D_{+}^{i \times X}, B]_{\bar{\nu}_i}$

und  $\pi_0(B_0^{D_{+}^{i \times X}, \nu_i}) = [D_{+}^{i \times X}, B_0]_{\nu_i}$  eine exakte Sequenz

$$(***) \quad \pi_1(B^{D_{+}^{i \times X}, \bar{\nu}_i}; \bar{\nu}_i) \xrightarrow{\hat{p}_*} \pi_1(B_0^{D_{+}^{i \times X}, \nu_i}; \nu_i')$$

$$\longrightarrow \text{Aut}((B, p) \text{ rel } \bar{\nu}_i) \longrightarrow [D_{+}^{i \times X}, B]_{\bar{\nu}_i} \xrightarrow{\hat{p}_*} [D_{+}^{i \times X}, B_0]_{\nu_i}.$$

Ein Element aus  $\pi_1(B^{D_{+}^{i \times X}, \bar{\nu}_i}; \bar{\nu}_i)$  wird repräsentiert durch

eine Abbildung  $F: I \times D_{+}^{i \times X} \rightarrow B$  mit  $F|_{I \times S^{i-1 \times X}} = \bar{\nu}_i|_{S^{i-1 \times X}} \circ \text{pr}_{S^{i-1 \times X}}$

und  $F|_{\partial I \times D_{+}^{i \times X}} = \bar{\nu}_i$ . Deshalb läßt sich nach Identifikation

von  $I \times D_{+}^{i \times X}$  mit  $D_{+}^{i+1 \times X}$   $\pi_1(B^{D_{+}^{i \times X}, \bar{\nu}_i}; \bar{\nu}_i)$  mit  $[D_{+}^{i+1 \times X}, B]_{\bar{\nu}_{i+1}}$

identifizieren. Genauer:

Wie im Beweis von 4.5.(C) läßt sich aus  $F$  eine Abbildung

$$\bar{\nu}_{(F)}: D_{+}^{i+1 \times X} \rightarrow B \quad \text{mit} \quad \bar{\nu}_{(F)}|_{S^{i \times X}} = \bar{\nu}_{i+1} \quad \text{konstruieren und}$$

umgekehrt aus jeder solcher Abbildung eine Homotopie relativ Rand

zwischen  $\overline{\mathcal{V}}_i|_{D_+^{i \times X}}$  und sich. Diese Konstruktion liefert einen Isomorphismus zwischen  $\pi_1(B_+^{D_+^{i \times X}}, \overline{\mathcal{V}}_i; \overline{\mathcal{V}}_i)$  und  $[D_+^{i+1 \times X}, B]_{\overline{\mathcal{V}}_{i+1}}$ . Analog erhalten wir einen Isomorphismus zwischen  $\pi_1(BO_+^{D_+^{i \times X}}, \mathcal{V}_i; \mathcal{V}'_i)$  und  $[D_+^{i+1 \times X}, BO]_{\mathcal{V}_{i+1}}$  und nach Definition dieser Isomorphismen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(B_+^{D_+^{i \times X}}, \overline{\mathcal{V}}_i; \overline{\mathcal{V}}_i) & \xrightarrow{\hat{P}_*} & \pi_1(BO_+^{D_+^{i \times X}}, \mathcal{V}_i; \mathcal{V}'_i) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ [D_+^{i+1 \times X}, B]_{\overline{\mathcal{V}}_{i+1}} & \xrightarrow{P_*} & [D_+^{i+1 \times X}, BO]_{\mathcal{V}_{i+1}} \end{array}$$

Unter Verwendung dieses kommutativen Diagramms erhalten wir aus (\*\*\*) die Sequenz

$$\begin{aligned} (**) \quad [D_+^{i+1 \times X}, B]_{\overline{\mathcal{V}}_{i+1}} &\xrightarrow{P_*} [D_+^{i+1 \times X}, BO]_{\mathcal{V}_{i+1}} \longrightarrow \text{Aut}((B, p) \text{ rel } \overline{\mathcal{V}}_i) \\ &\longrightarrow [D_+^{i \times X}, B]_{\overline{\mathcal{V}}_i} \xrightarrow{P_*} [D_+^{i \times X}, BO]_{\mathcal{V}_i} . \end{aligned}$$

(2) Im zweiten Schritt wollen wir für  $j = i, i+1$  Isomorphismen

$$\overline{\omega}: \pi_j(B^X; \overline{\mathcal{V}}_X) \longrightarrow [D_+^{j \times X}, B]_{\overline{\mathcal{V}}_j} \quad \text{und} \quad \omega: \pi_j(BO^X; \mathcal{V}_X) \longrightarrow [D_+^{j \times X}, BO]_{\mathcal{V}_j}$$

konstruieren, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} [D_+^{j \times X}, B]_{\overline{\mathcal{V}}_j} & \xrightarrow{P_*} & [D_+^{j \times X}, B]_{\mathcal{V}_j} \\ \overline{\omega} \uparrow & & \omega \uparrow \\ \pi_j(B^X; \overline{\mathcal{V}}_X) & \xrightarrow{\hat{P}_*} & \pi_j(BO^X; \mathcal{V}_X) \end{array}$$

kommutiert.

Daraus folgt dann zusammen mit der im ersten Schritt

hergeleiteten Sequenz (\*\*) die exakte Sequenz (\*) des Satzes.

Sei  $\bar{h}: I \times D_+^j \rightarrow D_+^j$  eine Homotopie relativ  $t_0$  zwischen  $\text{Id}_{D_+^j}$  und der konstanten Abbildung  $c_{t_0}$ , so daß  $h_t = \text{Id}$  für  $t \in \mathbb{R}, 0 \leq t < 1$ . ( $t_0 \in D_+^j$ , so daß  $\overline{\mathcal{V}}_j|_{t_0 \times M} = \overline{\mathcal{V}}_M$ ). Wir definieren  $\bar{H}: I \times D_+^j \times X \rightarrow B$  durch  $\bar{H}(s, t, x) = \overline{\mathcal{V}}_i(h(s, t), x)$ . Es gilt  $\bar{H}_0 = \overline{\mathcal{V}}_j$ ,  $\bar{H}_1 = \overline{\mathcal{V}}_X \circ \text{pr}_X$  und  $H_s|_{t_0 \times X} = \overline{\mathcal{V}}_X$  für alle  $s \in I$ . Sei  $\bar{H} = \bar{H}|_{I \times S^{i-1} \times X}$ .

Sei  $\varphi: D_+^j \longrightarrow D_+^j \cup_{(t) \times S^{j-1}} I \times S^{j-1}$  ein Diffeomorphismus, so daß für eine Kragenumgebung  $V$  von  $S^{j-1}$  in  $D_+^j$   $\varphi|_V: V \longrightarrow I \times S^{j-1}$  ein Diffeomorphismus mit  $\varphi|_{S^{j-1}} = \text{Id}$  ist:



$\phi: D_+^j \times X \longrightarrow D_+^j \times X \cup_{(t) \times \dots} I \times S^{j-1} \times X$  sei durch  $\phi = \varphi \times \text{Id}_X$  definiert.

Repräsentiert  $f: D_+^j \times X \longrightarrow B$  ein Element in  $\pi_j(B^X; \overline{\nu}_X)$

(d.h.  $f|_{S^{j-1} \times X} = \overline{\nu}_X \circ \text{pr}_X$ ), so ist  $(f \circ \overline{H}) \circ \phi$  eine Abbildung  $D_+^j \times X \longrightarrow B$  mit  $(f \circ \overline{H}) \circ \phi|_{S^{j-1} \times X} = \overline{\nu}_j$ .

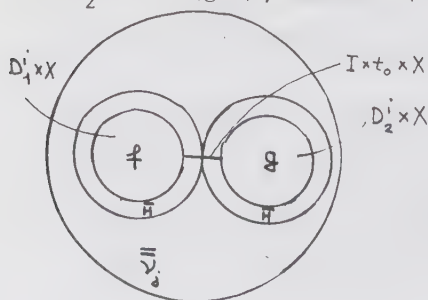
Wir definieren  $\overline{\omega}: \pi_j(B^X; \overline{\nu}_X) \longrightarrow [D_+^j \times X, B]_{\overline{\nu}_j}$  durch  $\overline{\omega}(f) = [(f \circ \overline{H}) \circ \phi]$ .

Ist  $G: I \times D_+^j \times X \longrightarrow B$  eine Homotopie relativ  $S^{j-1} \times X$  zwischen  $f$  und  $f'$  mit  $f|_{S^{j-1} \times X} = \overline{\nu}_X \circ \text{pr}_X$  und  $f'|_{S^{j-1} \times X} = \overline{\nu}_X \circ \text{pr}_X$ , so ist  $(G \cup (\text{Id}_I \times \overline{H})) \circ (\text{Id}_I \times \phi): I \times D_+^j \times X \longrightarrow B$  eine Homotopie relativ  $S^{j-1} \times X$  zwischen  $(f \circ \overline{H}) \circ \phi$  und  $(f' \circ \overline{H}) \circ \phi$ , d.h.  $\overline{\omega}$  ist wohldefiniert.

Wir zeigen nun, daß  $\overline{\omega}$  ein Homomorphismus ist.

Seien  $f, g: D_+^j \times X \longrightarrow B$  zwei Abbildungen, die Elemente in  $\pi_j(B^X; \overline{\nu}_X)$  repräsentieren (d.h.  $f, g|_{S^{j-1} \times X} = \overline{\nu}_X \circ \text{pr}_X$ ).

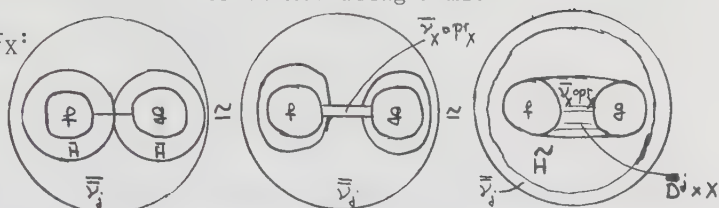
Nach 4.3 wird  $\overline{\omega}(f) \cdot \overline{\omega}(g) = [(f \circ \overline{H}) \circ \phi] \cdot [(g \circ \overline{H}) \circ \phi]$  durch eine Abbildung  $\tilde{v}: D_+^j \times X \longrightarrow B$  definiert, die auf  $D_+^j \times X$  mit  $(f \circ \overline{H}) \circ \phi$ , auf  $D_+^j \times X$  mit  $(g \circ \overline{H}) \circ \phi$  und auf  $(D_+^j \setminus (D_+^j \cup D_+^j)) \times X$  mit  $\overline{\nu}_j$  übereinstimmt:



Es gilt  $\tilde{v}|_{I \times t_0 \times X} = \overline{\nu}_X \circ \text{pr}_X$  nach Wahl von  $\overline{H}$ .

$\tilde{\mathcal{V}}$  ist homotop relativ Rand zu einer Abbildung  $\tilde{\mathcal{V}}'$  mit

$$\tilde{\mathcal{V}}|_{\bar{D}_+^j \times X} = \tilde{\mathcal{V}}_X \circ \text{pr}_X:$$



Ist  $q: D_+^j \rightarrow D_+^j \vee D_+^j$  die Wedge-Abbildung, die  $\bar{D}_+^j$  mit dem Basispunkt  $t_0$  identifiziert, so gilt  $[f] + [g] = [(f \vee g) \circ (q \times \text{Id}_X)]$ .

$\tilde{\mathcal{V}}'$  ist durch  $((f \vee g) \circ (q \times \text{Id}_X) \cup \tilde{H}) \circ \phi$  gegeben, wobei die Homotopie

$\tilde{H}: I \times S^{j-1} \times X \rightarrow B$  zwischen  $\tilde{\mathcal{V}}_i$  und  $\tilde{\mathcal{V}}_X \circ \text{pr}_X$  durch die Homotopie zwischen  $\tilde{\mathcal{V}}$  und  $\tilde{\mathcal{V}}'$  aus  $\bar{H} \vee \bar{H}$  konstruiert wurde.

Da  $\bar{H}: I \times S^{j-1} \times X \rightarrow B$  auf  $I \times D_+^j \times X$  fortsetzbar ist, sind  $\tilde{H}$  und  $\bar{H}$  homotop relativ Rand.

Damit folgt  $((f \vee g) \circ (q \times \text{Id}_X) \cup \tilde{H}) \circ \phi \simeq ((f \vee g) \circ (q \times \text{Id}_X) \cup \bar{H}) \circ \phi$ , also

$$\bar{\omega}(f) \cdot \bar{\omega}(g) = [\tilde{\mathcal{V}}] = [\tilde{\mathcal{V}}'] = [((f \vee g) \circ (q \times \text{Id}_X) \cup \tilde{H}) \circ \phi] = [((f \vee g) \circ (q \times \text{Id}_X) \cup \bar{H}) \circ \phi] = \bar{\omega}(f + g).$$

Also ist  $\bar{\omega}$  ein Homomorphismus.

Definiert man  $\bar{H}_-: I \times D_+^j \times X \rightarrow B$  durch  $\bar{H}_-(s, t, x) = \bar{H}(1-s, t, x)$

und  $\bar{H}_- = \bar{H}|_{I \times S^{j-1} \times X}$ , so ist durch

$$\bar{\omega}_-(g) = (g \cup \bar{H}_-) \circ \phi \text{ eine Abbildung } \bar{\omega}_-: [D_+^j \times X, B]_{\bar{\mathcal{V}}_j} \rightarrow \pi_j(B^X; \bar{\mathcal{V}}_X)$$

definiert

$\bar{H} \cup \bar{H}_-: I \times I / \sim \times S^{j-1} \times X \rightarrow B$  kann als

Element von  $\pi_1(B^{S^{j-1} \times X}; \bar{\mathcal{V}}_j)$  aufgefaßt

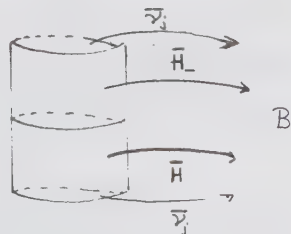
werden und ist in  $\pi_1(B^{S^{j-1} \times X}; \bar{\mathcal{V}}_j)$

nullhomotop. Daraus folgt

$$\bar{\omega} \circ \bar{\omega}_- = \text{Id}_{[D_+^j \times X, B]_{\bar{\mathcal{V}}_j}}.$$

Analog erhalten wir  $\bar{\omega}_- \circ \bar{\omega} = \text{Id}_{\pi_j(B^X; \bar{\mathcal{V}}_X)}$ .

Damit ist die Bijektivität von  $\bar{\omega}$  gezeigt, d.h.  $\bar{\omega}$  ist ein Isomorphismus.



Wir definieren nun  $H = p \circ \bar{H}: I \times S^{j-1} \times X \longrightarrow BO$ .

$$\omega: \pi_j(BO^X; \mathcal{V}'_j) \longrightarrow [D_+^j \times X, BO]_{\mathcal{V}_j} \quad \text{sei durch} \\ f \longmapsto [(f \vee H) \circ \phi] \quad \text{definiert.}$$

Genauso wie für  $\bar{\omega}$  folgt, daß  $\omega$  ein Isomorphismus ist.

Außerdem gilt  $\omega \circ \hat{p}_*(f) = \omega(p \circ f) = ((p \circ f) \cup H) \circ \phi \\ = (p \circ (f \vee \bar{H}) \circ \phi) = p_* \bar{\omega}(f)$ , d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_j(B^X; \bar{\mathcal{V}}_X) & \xrightarrow{\hat{p}_*} & \pi_j(BO^X; \mathcal{V}_X) \\ \downarrow \bar{\omega} & & \downarrow \omega \\ [D_+^j \times X, B]_{\bar{\mathcal{V}}_j} & \xrightarrow{p_*} & [D_+^j \times X, BO]_{\mathcal{V}_j} \end{array}$$

ist kommutativ.

(3) Angenommen, wir haben eine H-Gruppen-Struktur

$\mu: B^X \times B^X \longrightarrow B^X$  auf  $B^X$ , so daß die konstante Abbildung

$c: B^X \longrightarrow B^X$ ,  $f \longmapsto c_{z_0}$  ( $c_{z_0}(x) = z_0$  konstant  $z_0$ )

homotopie-neutrales Element ist.

$$\text{Dann ist } \psi: \pi_j(B^X; c_{z_0}) \longrightarrow \pi_j(B^X; \mu(c_{z_0}, \bar{\mathcal{V}}_X)) \\ f \longmapsto \mu(f, \bar{\mathcal{V}}_X)$$

ein wohldefinierter Homomorphismus. Da die H-Raum-Multiplikation nach Voraussetzung ein Homotopieinverses hat, ist  $\psi$  ein Isomorphismus.

$$\text{Weil die Komposition } B^X \xrightarrow{(c, Id)} B^X \times B^X \xrightarrow{\mu} B^X$$

homotop zur Identität ist, gilt  $\pi_j(B^X; \mu(c_{z_0}, \bar{\mathcal{V}}_X)) \cong \pi_j(B^X; \bar{\mathcal{V}}_X)$ .

Wegen  $\pi_j(B^X; c_{z_0}) \cong [S^j \wedge X_+, B] \cong [\Sigma^j X_+, B]$  gilt also

$$\pi_j(B^X; \bar{\mathcal{V}}_X) \cong [\Sigma^j X_+, B]$$

(4) Die Whitney-Summe induziert eine homotopie-kommutative

H-Gruppen-Struktur  $\bar{\mu}$  auf  $BO$  [Sw, Chap.11]. Das liefert eine

H-Gruppen-Struktur  $\mu': BO^X \times BO^X \longrightarrow BO^X$ ,  $(f, g) \longmapsto \bar{\mu} \circ (f, g)$ .

Aus dem unter (3) Bewiesenen folgt damit

$$\pi_j(BO^X; \bar{\nu}_X) \cong [\Sigma^j X_+, BO] \cong \widetilde{KO}(\Sigma^j X_+).$$

(5) Ist  $\hat{p}: B^X \longrightarrow BO^X$  eine H-Raum-Abbildung, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} [\Sigma^j X_+, B] & \xrightarrow{p_*} & [\Sigma^j X_+, BO] \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \pi_j(B^X; c_{z_0}) & \xrightarrow{\hat{p}_*} & \pi_j(BO^X; c_{z'_0}) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \pi_j(B^X; \nu(c_{z_0}, \bar{\nu}_X)) & \longrightarrow & \pi_j(BO^X; \nu'(c_{z'_0}, \nu_X)) \cdot (z'_0 = p(z_0)). \end{array} \quad (i)$$

Da  $\hat{p} \circ \nu$  und  $\nu' \circ (\hat{p}, \hat{p})$  homotop sind, sind

$\hat{p} \circ \nu(c_{z_0}, \bar{\nu}_X)$  und  $\nu' \circ (\hat{p}, \hat{p})(c_{z_0}, \bar{\nu}_X) = \nu'(c_{z'_0}, \nu_X)$  durch einen Weg verbindbar, der einen Isomorphismus

$\pi_j(BO^X; \nu'(c_{z'_0}, \nu_X)) \longrightarrow \pi_j(BO^X; \hat{p} \circ \nu(c_{z_0}, \bar{\nu}_X))$  induziert, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_j(B^X; \nu(c_{z_0}, \bar{\nu}_X)) & \longrightarrow & \pi_j(BO^X; \nu'(c_{z'_0}, \nu_X)) \\ & \searrow \hat{p}_* & \swarrow \\ & \pi_j(BO^X; p \circ \nu(c_{z_0}, \bar{\nu}_X)) & \end{array} \quad (ii)$$

kommutiert.

Ein Isomorphismus zwischen  $\pi_j(B^X; \nu(c_{z_0}, \bar{\nu}_X))$  und  $\pi_j(B^X; \bar{\nu}_X)$

wird von einem Weg  $\alpha: I \longrightarrow B^X$  zwischen  $\nu(c_{z_0}, \bar{\nu}_X)$  und

$\bar{\nu}_X$  induziert. Verwendet man für den Isomorphismus

$\pi_j(BO^X, p \circ \nu(c_{z_0}, \bar{\nu}_X)) \cong \pi_j(BO^X, p \circ \bar{\nu}_X) = \pi_j(BO^X; \nu_X)$  den Weg

$\alpha' = p \circ \alpha$  so erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_j(B^X; \nu(c_{z_0}, \bar{\nu}_X)) & \xrightarrow{\hat{p}_*} & \pi_j(BO^X, p \circ \nu(c_{z_0}, \bar{\nu}_X)) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \pi_j(B^X; \bar{\nu}_X) & \xrightarrow{\hat{p}_*} & \pi_j(BO^X; \nu_X) \end{array} \quad (iii)$$

Durch Zusammensetzen der Diagramme (i), (ii) und (iii) erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} [\Sigma^j X_+, B] & \xrightarrow{P_*} & [\Sigma^j X_+, BO] \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \pi_j(B^X; \mathcal{V}_X) & \xrightarrow{\hat{P}_*} & \pi_j(BO^X; \mathcal{V}_X) \end{array} \quad (iv)$$

Aus der unter (1) und (2) hergeleiteten Sequenz (\*) für  $\text{Aut}((B, p) \text{rel } \bar{\mathcal{V}}_1)$  ergibt sich nun unter Verwendung des kommutativen Diagramms (iv) für  $\text{Aut}((B, p) \text{rel } \bar{\mathcal{V}}_1)$  die Sequenz

$$\begin{aligned} [\Sigma^{i+1} X_+, B] &\xrightarrow{P_*} [\Sigma^{i+1} X_+, BO] \longrightarrow \text{Aut}((B, p) \text{rel } \bar{\mathcal{V}}_1) \\ &\longrightarrow [\Sigma^i X_+, B] \xrightarrow{P_*} [\Sigma^i X_+, BO] \end{aligned}$$

q.e.d.

#### Korollar 4.8:

Sei  $F_k \xrightarrow{P} B \xrightarrow{P_*} BO$  der  $k$ -Typ von  $M$ .

a) Ist  $M$   $(k-i+1)$ -zusammenhängend, so gibt es einen Isomorphismus

$$\phi_k^i: \text{Aut}((B, p) \text{rel } \bar{\mathcal{V}}_1) \longrightarrow \pi_i(F_k)$$

und eine exakte Sequenz

$$\pi_{i+1}(B) \xrightarrow{P_*} \pi_{i+1}(BO) \longrightarrow \text{Aut}((B, p) \text{rel } \bar{\mathcal{V}}_1) \longrightarrow \pi_i(B) \xrightarrow{P_*} \pi_i(BO).$$

b) Ist  $M$  nur  $(k-i)$ -zusammenhängend, so gibt es einen injektiven Homomorphismus

$$\phi_k^i: \text{Aut}((B, p) \text{rel } \bar{\mathcal{V}}_1) \longrightarrow \pi_i(F_k).$$

#### Beweis:

Ist  $M$   $(k-i+1)$ -zusammenhängend, so läßt sich eine CW-Struktur von  $M$  wählen, so daß das  $(k-i+1)$ -Gerüst  $X$  nur aus einem

Punkt  $x_0$  besteht.

Die exakte Sequenz für  $\text{Aut}((B,p)\text{rel}\bar{\nu}_1)$  erhält man nun unmittelbar aus Satz 4.7 (\*).

Wir wollen eine Abbildung  $\phi_k^i: \text{Aut}((B,p)\text{rel}\bar{\nu}_1) \rightarrow \widetilde{\pi}_i(F_k)$  definieren. Sei  $h \in \text{Aut}((B,p)\text{rel}\bar{\nu}_1)$ .

Die primäre Differenz der Lifte  $\bar{\nu}_i|_{D_+^i}$  und  $h \circ \bar{\nu}_i|_{D_+^i}: D_+^i \rightarrow B$  in  $H^i(D_+^i, S^{i-1}; \widetilde{\pi}_i(F_k)) = \widetilde{\pi}_i(F_k)$  bezeichnen wir mit  $\delta(\bar{\nu}_i, h \circ \bar{\nu}_i)$  und definieren  $\phi_k^i$  durch  $\phi_k^i(h) = \delta(\bar{\nu}_i, h \circ \bar{\nu}_i)$ .

$\phi_k^i$  ist bijektiv ([Wh, Chap. VI, Thm. 6.13] +  $NS_k(D^i \times M \text{ rel } \bar{\nu}_1) \cong NS_k(D^i \text{ rel } \bar{\nu}_{1|_M})$ )

Nach Definition der Addition auf  $\text{Aut}((B,p)\text{rel}\bar{\nu}_1)$ , bzw.,  $NS_k(D^i \times M \text{ rel } \bar{\nu}_1)$  (Vgl. Hilfssatz 4.3) und der Konstruktion von  $\delta(\bar{\nu}_i, h \circ \bar{\nu}_i)$  folgt ähnlich wie in 4.7 die Homomorphieeigenschaft von  $\phi_k^i$ .

b) Wegen  $\widetilde{\pi}_{k+1}(F_k) = \{0\}$  ist  $H^q(D_+^i \times X, S^{i-1} \times X; \widetilde{\pi}_q(F_k))$  null für  $i+1 \leq q \leq k+1 = \dim(D_+^i \times X, S^{i-1} \times X)$  ( $X = M^{(k-i+1)}$ ).

Nach [Wh, Chap. VI, Thm. 6.12] ist  $\phi_k^i = \delta(\bar{\nu}_i, - \circ \bar{\nu}_i)$  noch injektiv.

q.e.d.

Mit Korollar 4.8 erhält man, daß  $\widetilde{\pi}_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M)$  für  $i > n+1$  allein durch die entsprechende B-Bordismusgruppe und durch L-Theorie bestimmt ist.

#### Satz 4.9:

Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $i > n+1$ .

Sei  $k = \left\lfloor \frac{n+i-1}{2} \right\rfloor$  und  $B_k \xrightarrow{p} B0$  der  $k$ -Typ von  $M$ .

Dann ist  $\beta_i: NS_k(D^i \times M; \bar{\nu}_i) \longrightarrow \widetilde{\pi}_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M)$

ein Isomorphismus.

Ist z.B.  $M$  1-zusammenhängend,  $n+i$  gerade,  $\neq 6, 14$  und

$\hat{\Omega}_{n+i}^{B_k} = \text{Kern}(\hat{\Omega}_{n+i}^{B_k} \xrightarrow{\Theta} L_{n+i}(e))$  der Kern der Signatur, bzw. der Arf-Invariante, so gibt es einen Isomorphismus

$$\hat{\Omega}_{n+i}^{B_k} \xrightarrow{\cong} \pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}(M)}.$$

Beweis:

Für  $i > n+1$  und  $k = \left\lfloor \frac{n+i-1}{2} \right\rfloor$  ist  $k-i+1 < 0$ , also  $i > k+1$ .

Dann ist  $p_*: \pi_j(B) \rightarrow \pi_j(B_0)$  für  $j = i$  und  $j = i+1$  ein

Isomorphismus; und für  $j = i-1$  ist  $p_*$  zumindest noch injektiv.

Aus der exakten Sequenz für  $\text{Aut}((B_k, p) \text{rel } \bar{\nu}_j)$  ( $j = i, i-1$ )

in Korollar 4.8.a) folgt  $\text{Aut}((B_k, p) \text{rel } \bar{\nu}_i) = \{0\}$  und

$\text{Aut}((B_k, p) \text{rel } \bar{\nu}_{i-1}) = \{0\}$ . Aus der exakten Sequenz 4.5'

erhalten wir damit, daß  $\beta_i: \text{NS}_k(D^i_{XM}; \bar{\nu}_i) \rightarrow \pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}(M)}$  ein Isomorphismus ist.

Ist  $n+i$  gerade und  $M$  1-zusammenhängend, so ist wegen  $i > n+1$

$v_{\frac{n+i}{2}}(M) = 0$  und  $H_{\frac{n+i}{2}}(M; \mathbb{Z}) = \{0\}$ . Also ist  $S(D^i_{XM})$  minimal (H.S. 3.9).

Dann gilt  $L_{i+1, n}^{(k)}(M) = L_{n+i+1}(e) = 0$  und  $L_{i, n}^{(k)}(M) = L_{n+i}(e)$

und aus 3.7 erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{NS}_k(D^i_{XM}; \bar{\nu}_i) \rightarrow \hat{\Omega}_{n+i}^{B_k} \xrightarrow{\Theta} L_{n+i}(e),$$

wobei  $\Theta$  durch die Signatur, bzw. durch die Arf-Invariante gegeben ist, d.h. es gilt

$$\text{NS}_k(D^i_{XM}; \bar{\nu}_i) \cong \text{Kern } \Theta = \hat{\Omega}_{n+i}^{B_k}.$$

q.e.d.

§ 5 Anwendung auf einfach zusammenhängende  
4-dimensionale Mannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel soll die Methode zur Bestimmung von  $\widetilde{\pi}_1 \text{Diff}(M)$ , wie sie in den Kapiteln 2 - 4 dargestellt wurde, zur Berechnung von  $\widetilde{\pi}_1 \text{Diff}(M)$  für einfach zusammenhängende vierdimensionale Mannigfaltigkeiten benutzt werden.

An den Anfang gestellt werden soll ein Problem, das sich aus der Arbeit von Donaldson über 4-dimensionale Mannigfaltigkeiten ergibt. Danach wird  $\widetilde{\pi}_1 \text{Diff}(M)$  in Form von exakten Sequenzen dargestellt und die entsprechende Bordismusgruppe  $\Omega_6^B$  berechnet. Wir stellen Folgerungen für das eingangs gestellte Problem von Donaldson auf und vergleichen zum Abschluß das klassische Verfahren zur Bestimmung von Blockdiffeomorphismen mit dem hier dargestellten Verfahren. Dabei wird ein Fehler bei der Berechnung von Homotopieäquivalenzen in  $[A, B, K]$  aufgedeckt.

A) Ein Problem im Zusammenhang mit den Ergebnissen von  
Donaldson über 4-dimensionale Mannigfaltigkeiten

S.K. Donaldson hat bewiesen, daß die einzige positiv definite quadratische Form, die als Schnittform einer 1-zusammenhängenden 4-Mannigfaltigkeit vorkommen kann, die Standardform  $\sum x_i^2$  ist [Do] .

Im Beweis dieses Satzes wird zu einer 1-zusammenhängenden 4-Mannigfaltigkeit  $M$  mit positiv definiter Schnittform und fest vorgegebener Riemann'scher Metrik aus der inneren Geometrie von  $M$  ein Bordismus zwischen  $M$  und einer disjunkten Vereinigung von  $r$  projektiven Räumen  $P_2\mathbb{C}$  konstruiert, wobei  $r = \text{rg } H_2(M)$ . Daraus folgt dann, daß die Schnittform auf  $H_2(M)$  die Standardform ist.

Die Schnittform von  $M_r := \#_{i=1}^r P_2\mathbb{C}$  ist die positiv definite Standardform. Also erhält man aus der inneren Geometrie von  $M_r$  einen Bordismus zwischen  $M_r$  und  $\bigcup_{i=1}^r P_2\mathbb{C}$ .

Ist  $M_r \longrightarrow E \longrightarrow S^1$  ein Faserbündel über  $S^1$  mit Faser  $M_r$  und Strukturgruppe  $\text{Iso}(M_r, \nu)$ , so erhalten wir einen faserweisen Bordismus zwischen  $E$  und  $r$  Faserbündeln  $P_2\mathbb{C} \longrightarrow E_j \longrightarrow S^1$  mit Faser  $P_2\mathbb{C}$  und Strukturgruppe  $\text{Iso}(P_2\mathbb{C}, \nu_j)$ .

Dabei ist für eine Mannigfaltigkeit  $M$  mit Riemann'scher Metrik  $\nu$   $\text{Iso}(M, \nu)$  die Gruppe der Isometrien von  $(M, \nu)$ .

Ein Faserbündel  $M_r \longrightarrow E \longrightarrow S^1$  wird durch ein Element  $\alpha(E)$  aus  $\pi_{i-1} \text{Iso}(M_r, \nu)$  klassifiziert. Wegen der Natürlichkeit obiger Konstruktion drängt sich die Frage auf, ob nicht

$\pi_{i-1} \text{Iso}(M_r, \nu)$  in  $\bigoplus_{j=1}^r \pi_{i-1} \text{Iso}(P_2\mathbb{C}, \nu_j)$  zerfällt, und ob das nicht auch für  $\text{Diff}(M_r)$  gilt.

Für  $\text{Diff}(M_r)$  läßt sich die Frage wie folgt präzisieren:

Seien  $S_1^3, \dots, S_{r-1}^3 \subset M_r$  Sphären, längs derer die zusammenhängende Summe  $\#_{j=1}^r P_2\mathbb{C}$  gebildet wird.

a) Ist  $\pi_1 \text{Diff}(M_r \text{ rel } \bigcup_{j=1}^r S_j^3) \longrightarrow \pi_1 \text{Diff}(M_r)$  ein Isomorphismus für alle  $i$ ?

b) Ist  $\widetilde{\pi_1 \text{Diff}(M_r \text{ rel } \bigcup_{j=1}^r S_j^3)} \longrightarrow \widetilde{\pi_1 \text{Diff}(M_r)}$  ein Isomorphismus für alle  $i$ ?

Auf die Frage b) soll in diesem Kapitel eingegangen werden.

B) Der Normalen-2-Typ einer 1-zusammenhängenden 4-dimensionalen  
Mannigfaltigkeit

Wir konstruieren eine Faserung  $\bar{B}_2(M) \xrightarrow{\bar{P}} BO$ , die bis auf die Kofaserungseigenschaft von  $\bar{\nu}_1: D_+^1 \times M \longrightarrow BO$  alle Eigenschaften des Normalen-2-Typs von  $M$  hat.

Hilfssatz 5.1:

Sei  $M$  eine 1-zusammenhängende 4-Mannigfaltigkeit.

- a) Es gibt eine Abbildung  $\Psi: M \longrightarrow K(\pi_2(M), 2)$ , die auf der zweiten Homotopiegruppe die Identität induziert und ein Bündel  $\xi \longrightarrow K(\pi_2(M), 2)$  mit  $w_2(\Psi^*(\xi)) = w_2(\nu(M))$ . Die von  $\gamma_{\xi \times_{B\text{Spin}}} : K(\pi_2(M), 2) \times B\text{Spin} \longrightarrow BO$  induzierte Faserung, die wir mit  $\bar{B}_2(M) \xrightarrow{\bar{P}} BO$  bezeichnen, ist 2-Postnikov-Zerlegung von  $\nu_M$ .
- b) Sei  $B_2(M) \longrightarrow BO$  der 2-Typ von  $M$  wie in 2.1, zusammen mit einem fest gewählten Normalen- $k$ -Smoothing  $\bar{\nu}_M: M \longrightarrow B_2(M)$ . Ist  $\tilde{\nu}_{\Psi^*(\xi)}: M \longrightarrow B\text{Spin}$  eine klassifizierende Abbildung von  $\nu(M) - \Psi^*(\xi)$ , so gibt es eine bis auf Faserhomotopie eindeutige Faserhomotopieäquivalenz  $h: B_2(M) \longrightarrow \bar{B}_2(M)$  mit  $h \circ \bar{\nu}_M = (\Psi, \tilde{\nu}_{\Psi^*(\xi)})$ .

Beweis:

Die Existenz von  $\Psi$  folgt aus den üblichen Eigenschaften von Eilenberg-Mac-Lane-Räumen.

$\pi_2(M) \cong H_2(M; \mathbb{Z})$  ist eine freie abelsche Gruppe.

Sei  $(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_s)$  eine Basis von  $\pi_2(M)$ , repräsentiert durch Abbildungen  $\alpha_i: S_i^2 \longrightarrow M$ , so daß  $\alpha_i^* \nu(M)$  nichttrivial für  $i \leq r$  und  $\alpha_i^* \nu(M)$  trivial für  $r+1 \leq i \leq s$ . Wegen der

Wahl der Basis können wir  $K(\pi_2(M), 2)$  mit  $K(\mathbb{Z}^s, 2) = \bigotimes_{i=1}^s \mathbb{P}_\infty \mathbb{C}$  identifizieren.

Sei  $\mathcal{L}_i \rightarrow (\mathbb{P}_\infty \mathbb{C})_i = \mathbb{P}_\infty \mathbb{C}$  das kanonische Linienbündel über dem  $i$ -ten projektiven Raum,  $j = 1, \dots, r$ , und

$\mathcal{E}_i$  das triviale Bündel über dem  $i$ -ten projektiven Raum,

$i = r+1, \dots, s$ . Wir definieren das Bündel  $\mathcal{E}$  durch

$$\mathcal{E} = \left( \bigotimes_{i=1}^r \mathcal{L}_i \right) \times \left( \bigotimes_{i=r+1}^s \mathcal{E}_i \right).$$

Dann gilt  $\langle \psi^* w_2(\mathcal{E}), x_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \leq r \\ 0, & \text{falls } r+1 \leq i \leq s. \end{cases}$

also  $\psi^* w_2(\mathcal{E}) = w_2(\mathcal{V}(M))$ ;

d.h.  $\mathcal{E}$  hat die gewünschte Eigenschaft.

Es folgt  $w_2(\mathcal{V}(M) - \psi^* \mathcal{E}) = 0$ , d.h.  $\mathcal{V}(M) - \psi^* \mathcal{E}$  hat eine Spin-Struktur. Sei  $\widetilde{\nu}_{\psi^* \mathcal{E}}: M \rightarrow B \text{ Spin}$  eine klassifizierende Abbildung für dieses Bündel.

$(\psi, \widetilde{\nu}_{\psi^* \mathcal{E}}): M \rightarrow K(\pi_2(M), 2) \times B \text{ Spin}$  ist nach Konstruktion eine 2-Äquivalenz, und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{(\psi, \widetilde{\nu}_{\psi^* \mathcal{E}})} & K(\pi_2(M), 2) \times B \text{ Spin} \\ & \searrow \nu_M & \downarrow \mathcal{P}_{\mathcal{E}} \times \mathcal{L}_{\text{Spin}} \\ & & BO \end{array}$$

ist homotopiekommutativ. Verwandeln wir  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}} \times \mathcal{L}_{\text{Spin}}$

in eine Faserung  $\overline{B}_2(M) \xrightarrow{\overline{P}} BO$ , so liefert  $(\psi, \widetilde{\nu}_{\psi^* \mathcal{E}})$  einen Lift  $\overline{\nu}_M'$  von  $\nu_M$ , der eine 2-Äquivalenz ist.

Mit  $\pi_3(\overline{B}_2(M)) = 0$  folgt, daß für die Faser  $\overline{F}_2$  von

$\overline{B}_2(M) \rightarrow BO$   $\pi_q(\overline{F}_2) = \{0\}$  für  $q \geq 3$  gilt.

Damit ist gezeigt, daß  $\overline{B}_2(M) \xrightarrow{\overline{P}} BO$  2-Postnikov-Zerlegung von  $\nu_M$  ist.

b) folgt unmittelbar aus der Eindeutigkeit der 2-Postnikov-Zerlegung von  $\nu_M$  (Vgl. [Bau, Cor. 5.3.8], bzw. [Kr<sub>1</sub>, § 7]).

q.e.d.

Zur Berechnung von  $\text{Aut}((B_2(M), p) \text{rel } \overline{\nu}_2)$  und  $\text{Aut}((B_2(M), p) \text{rel } \overline{\nu}_1)$  wird die Kenntnis der ersten und zweiten Homotopiegruppe der Faser von  $B_2(M) \xrightarrow{p} BO$  benötigt.

### Hilfssatz 5.2:

Sei  $F_2$  die Faser von  $B_2(M) \xrightarrow{p} BO$ . Dann gilt

$$\pi_2(F_2) = \begin{cases} \pi_2(M), & \text{falls } M \text{ Spin-Mannigfaltigkeit} \\ K\pi_2(M) = \{\alpha \in \pi_2(M) \mid \alpha^* \nu(M) \text{ trivial}\}, & \text{falls } w_2(M) \neq 0 \end{cases}$$

$$\pi_1(F_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{falls } M \text{ Spin-Mannigfaltigkeit} \\ \{0\}, & \text{falls } w_2(M) \neq 0. \end{cases}$$

### Beweis:

Aus der Faserhomotopiesequenz von  $F_2 \xrightarrow{i} B_2(M) \xrightarrow{p} BO$  erhält man eine exakte Sequenz

$$(*) \quad 0 \longrightarrow \pi_2(F_2) \xrightarrow{i_*} \pi_2(B_2(M)) \xrightarrow{p_*} \pi_2(BO) \longrightarrow \pi_1(F_2) \longrightarrow 0.$$

Ist  $M$  eine Spin-Mannigfaltigkeit, so ist  $(\nu_M)_*: \pi_2(M) \rightarrow \pi_2(BO)$  trivial, und wegen  $p \circ \overline{\nu}_M = \nu_M$  folgt  $p_* \equiv 0$ , da

$(\overline{\nu}_M)_*: \pi_2(M) \longrightarrow \pi_2(B_2(M))$  ein Isomorphismus ist.

Also folgt aus  $(*)$   $\pi_1(F_2) \cong \pi_2(BO) = \mathbb{Z}_2$  und  $\pi_2(F_2) \cong \pi_2(B_2(M)) \cong \pi_2(M)$ .

Ist  $M$  keine Spin-Mannigfaltigkeit, so gibt es  $\alpha: S^2 \rightarrow M$ ,

so daß  $\nu_M \circ \alpha$  nicht nullhomotop ist. Wegen  $p_* \circ (\overline{\nu}_M)_* = (\nu_M)_*$  ist  $p_*$  surjektiv. Es folgt  $\pi_1(F_2) = \{0\}$ .

Ferner gilt  $\pi_2(F_2) \cong \text{Kern } p_* \cong \text{Kern } ((\nu_M)_*: \pi_2(M) \longrightarrow \pi_2(BO)) = K\pi_2(M)$ .

q. e. d.

C) Eine exakte Sequenz für  $\widetilde{\pi_1 \text{Diff}}(M)$

Die exakten Sequenzen 3.7 und 4.5' sollen nun zur Bestimmung von  $\widetilde{\pi_1 \text{Diff}}(M)$  benutzt werden. Zuvor soll eine Invariante für Diffeomorphismen eingeführt werden.

Sei  $f: S^1 \times M \longrightarrow S^1 \times M$  ein Diffeomorphismus, der ein Element in  $\widetilde{\pi_1 \text{Diff}}(M)$  repräsentiert. Da  $M$  1-zusammenhängend ist, kann  $f$  so gewählt werden, daß  $f|_{S^1 \times \{x_0\}} = \text{Id}$ . Eine Tubenumgebung von  $S^1 \times \{x_0\}$  in  $S^1 \times M$  läßt sich mit  $S^1 \times D^4$  identifizieren, und die Operation des Diffeomorphismus  $f$  auf dieser Umgebung entspricht einem Element in  $\pi_1 SO_4 = \mathbb{Z}_2$ , das mit  $\widetilde{\chi}(f)$  bezeichnet werden soll.

Ist  $M$  eine Spin-Mannigfaltigkeit, so ist  $\widetilde{\chi}(f)$  auf  $\widetilde{\pi_1 \text{Diff}}(M)$  wohldefiniert. Um das zu beweisen, soll  $\widetilde{\chi}(f)$  mit einer weiteren Invariante identifiziert werden.

Sei dazu  $M(f) = D^2 \times M \cup_f -D^2 \times M$  und  $\partial: H_2(M(f)) \longrightarrow H_1(S^1 \times M) = H_1(S^1)$  der Randoperator aus der Mayer-Vietoris-Sequenz von  $M(f)$ .

Da  $M$  1-zusammenhängend, ist  $\partial$  surjektiv.

Hilfssatz 5.3: Sei  $M$  eine Spin-Mannigfaltigkeit und  $f: S^1 \times M \longrightarrow S^1 \times M$  ein Diffeomorphismus mit  $f|_{S^1 \times \{x_0\}} = \text{Id}$ .  
Ist  $\alpha: S^2 \longrightarrow M(f)$  eine Abbildung mit  $\partial \alpha_*[S^2] = [S^1]$ ,  
so gilt  $w_2(\alpha^* \nu(M(f))) = \widetilde{\chi}(f)$ .

Korollar 5.4: Ist  $M$  eine Spin-Mannigfaltigkeit, so definiert  $\widetilde{\chi}$  einen Homomorphismus  $\widetilde{\pi_1 \text{Diff}}(M) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ .

Beweis von 5.3: Ist  $f: S^1 \times M \longrightarrow S^1 \times M$  ein Diffeomorphismus mit  $f|_{S^1 \times \{x_0\}} = \text{Id}$ , so ist

$\alpha : S^2 = D^2 \times \{x_0\} \cup D^2 \times \{x_1\} \subset D^2 \times M \cup_f D^2 \times M = M(f)$

eine Sphäre mit  $\partial \alpha_*[S^2] = [S^1]$ , und das Normalenbündel dieser Sphäre wird durch  $\tilde{\chi}(f)$  klassifiziert. Daraus folgt  $w_2(\alpha^* \mathcal{V}(M(f))) = \tilde{\chi}(f)$ .

Ist  $\alpha' : S^2 \rightarrow M(f)$  eine weitere Abbildung mit  $\partial \alpha'_*[S^2] = [S^1]$ ,

so gibt es  $\beta : S^2 \rightarrow M$ , so daß in  $\pi_2(M(f))$   $\alpha' = \alpha + i_*(\beta)$

gilt ( $i : M \hookrightarrow M(f)$  Inklusion). Dann ist

$w_2(\alpha'^* \mathcal{V}(M(f))) = w_2(\alpha^* \mathcal{V}(M(f))) + w_2((i \circ \beta)^* \mathcal{V}(M(f))) = \tilde{\chi}(f) + \beta^* w_2(\mathcal{V}(M)) = \tilde{\chi}(f)$ , da  $M$  Spin-Mannigfaltigkeit ist. q.e.d.

Beweis von 5.4: Ist  $F : D^2 \times M \rightarrow D^2 \times M$  ein Diffeomorphismus, der  $f'^{-1} \circ f$  fortsetzt, so liefert  $F \cup \text{Id}$  einen Diffeomorphismus  $M(f) \rightarrow M(f')$ . Ist  $\alpha : S^2 \rightarrow M(f)$  eine Abbildung mit  $\partial \alpha_*[S^2] = [S^1]$ , so gilt auch  $\partial'(F \cup \text{Id})_* \alpha_*[S^2] = [S^1]$  ( $\partial' : H_2(M(f')) \rightarrow H_1(S^1)$  Randoperator aus der Mayer-Vietoris-Sequenz von  $M(f')$ ). Da der Diffeomorphismus das Normalenbündel erhält, folgt aus Hilfssatz 5.3  $\tilde{\chi}(f) = \tilde{\chi}(f')$ , d.h.  $\tilde{\chi}$  ist wohldefiniert.

Da  $f_1$  und  $f_2$  so repräsentiert werden können, daß sie auf disjunkten Mengen verschieden von der Identität sind, folgt die Homomorphieeigenschaft. q.e.d.

#### Satz 5.5:

Sei  $M$  eine 1-zusammenhängende 4-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Ist  $M$  eine Spin-Mannigfaltigkeit, so gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \pi_2(M) \xrightarrow{\tilde{\chi}} \Omega_6^{\text{Spin}}(K(\pi_2(M), 2)) \xrightarrow{\tilde{\beta}_2} \pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M) \xrightarrow{\tilde{\chi}} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0.$$

Gilt  $w_2(M) \neq 0$ , so haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow K\pi_2(M) \xrightarrow{\tilde{\chi}} \Omega_6^{\text{Spin}}(M) \xrightarrow{\tilde{\beta}_2} \pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M) \rightarrow 0,$$

wobei  $K\pi_2(M) = \text{Kern } (\mathcal{V}_M)_* : \pi_2(M) \rightarrow \pi_2(BO)$ .

Beweis: a) Wir wollen zunächst die exakte Sequenz 3.7 zur Bestimmung von  $NS_2(D^2_{\times M}; \bar{\nu}_2)$  benutzen. In diesem Fall ist  $\dim D^2_{\times M} = 6$ . Da  $M$  1-zusammenhängend ist, gilt  $H_3(M; \mathbb{Z}) = \{0\}$ , d.h. die Voraussetzungen zur Anwendung von 3.7 sind erfüllt. Es gilt  $L_{3,4}^{(2)}(M) = L_7(e) = \{0\}$ .

Da für den Erzeuger  $\alpha: S^4 \rightarrow B \text{ Spin} \quad \langle w_4(\gamma_{\text{Spin}}), \alpha_*[S^4] \rangle \neq 0$  ist, folgt  $L_{2,4}^{(2)}(M) = L_6(e, S_e) = \{0\}$  (Vgl. Definition 3.3).

Aus der Surgery-Sequenz 3.7 folgt damit, daß  $NS_2(D^2_{\times M}; \bar{\nu}_2) \xrightarrow{\sim} \Omega_6^{B_2}(M)$  ein Isomorphismus ist, und damit ist auch  $NS_k(D^2_{\times M}; \bar{\nu}_2) \xrightarrow{\sim} \Omega_k^{B_2}(M)$  ein Isomorphismus (Vgl. Hilfssatz 5.1). Ist  $M$  eine Spin-Mannigfaltigkeit, so ist  $\bar{B}_2(M)$  durch  $K(\pi_2(M), 2) \times B \text{ Spin} \xrightarrow{\text{pr}_2 \circ \text{pr}_1} B O$  gegeben. Also gilt in diesem Fall  $\Omega_6^{B_2}(M) = \Omega_6^{\text{Spin}}(K(\pi_2(M), 2))$ .

b) Da  $M$  1-zusammenhängend ist, folgt aus Hilfssatz 4.8 a) und Hilfssatz 5.2

$$\text{Aut}((B_2(M), p) \text{rel } \bar{\nu}_2) \cong \pi_2(F_2) = \begin{cases} \pi_2(M), & \text{falls } M \text{ Spin-Mannigfaltigkeit} \\ K\pi_2(M), & \text{falls } w_2(M) \neq 0 \end{cases}$$

c) Zur Bestimmung des Homomorphismus  $\gamma_1: \pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M) \rightarrow \text{Aut}((B_2(M), p) \text{rel } \bar{\nu}_1)$  in der Sequenz 4.5 kann Hilfssatz 4.8. b) verwendet werden.

Danach ist  $\text{Aut}((B_2(M), p) \text{rel } \bar{\nu}_1) \xrightarrow{\sim} \pi_1(F_2)$  injektiv.

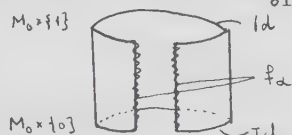
Falls  $w_2(M) \neq 0$ , ist  $\pi_1(F_2) = \{0\}$  (Hilfssatz 5.2), d.h.  $\gamma_1$  ist die Nullabbildung.

Sei nun  $M$  eine Spin-Mannigfaltigkeit und  $f: S^1_{\times M} \rightarrow S^1_{\times M}$  ein Diffeomorphismus mit  $f|_{D^1_{\times M}} = \text{Id}$ . Wegen  $B = K(\pi_2(M), 2) \times B \text{ Spin}$  ist  $f^* \bar{\nu}_2$  genau dann auf  $D^2_{\times M}$  fortsetzbar, wenn sich die Spin-Struktur  $\text{pr}_2 \circ \bar{\nu}_2: D^2_{\times M} \rightarrow B \text{ Spin}$  auf  $M(f) \cong D^2_{\times M} \cup_f -D^2_{\times M}$  fortsetzen läßt. Das einzige Hindernis ist das Normalenbündel von  $S^2 \xrightarrow{\alpha} M(f)$  mit  $\partial \alpha_*[S^2] = [S^1]$ . Nach Hilfssatz 5.3 gilt also  $\text{Kern } \gamma_1 = \widetilde{X}$ .

d) Wir zeigen nun die Surjektivität von  $\tilde{\chi}$ .

Sei  $f_{\alpha}: I \times S^3 \rightarrow I \times S^3$  durch  $f_{\alpha}(t, x) = (t, \alpha(t)(x))$  gegeben, wobei  $\alpha: (I, \partial I) \rightarrow (SO_4, \{Id\})$  das nichttriviale Element in  $\pi_1 SO_4$  repräsentiert.

Sei  $M_0 = M \setminus D^4$  und  $h = Id_{\partial I \times M_0} \cup f_{\alpha}: \partial(I \times M_0) \rightarrow \partial(I \times M_0)$ .



$h$  ist ein Diffeomorphismus, und  $\tilde{\chi}$  ist surjektiv, wenn sich dieser Diffeomorphismus zu einem Diffeomorphismus auf  $I \times M_0$  fortsetzen läßt.

Aus der Mayer-Vietoris-Sequenz für  $\partial(I \times M_0) \cong M_0 \# -M_0$  folgt unmittelbar, daß  $h_*: H_2(\partial(I \times M_0)) \rightarrow H_2(\partial(I \times M_0))$  die Identität ist. Dann ist  $h$  pseudoisotop zur Identität, da

$\pi_0 \widetilde{Diff}(\partial(I \times M_0)) \rightarrow \text{Aut}(H_2(\partial(I \times M_0)))$  injektiv ist [Kr<sub>3</sub>, Th. 1].

Ist  $H: \partial(I \times M_0) \times I \rightarrow \partial(I \times M_0) \times I$  eine Pseudoisotopie von  $h$  zur Identität und identifiziert man  $\partial(I \times M_0) \times I$  mit einer Kragenumgebung von  $\partial(I \times M_0)$  in  $I \times M_0$ , so läßt sich  $H$  von der Kragenumgebung durch die Identität ins Innere von  $I \times M_0$  fortsetzen, d.h.  $h$  ist auf  $I \times M_0$  fortsetzbar.

e) Aus der Sequenz 4.5' erhält man mit den Ergebnissen a) bis d) im Spin-Fall eine exakte Sequenz

$$\pi_2(M) \rightarrow \Omega_6^{\text{Spin}(K(\pi_2(M), 2))} \rightarrow \pi_1 \widetilde{Diff}_{B_2(M)}(M) \xrightarrow{\tilde{\chi}} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$$

und im Nicht-Spin-Fall  $K\pi_2(M) \rightarrow \Omega_6 \rightarrow \pi_1 \widetilde{Diff}(M) \rightarrow 0$ .

Die Injektivität von  $\pi_2(M) \rightarrow \Omega_6^{\text{Spin}(K(\pi_2(M), 2))}$ , bzw.

$K\pi_2(M) \rightarrow \Omega_6^{B_2(M)}$  wird erst in Hilfssatz 5.8 bewiesen.

q.e.d.

# D) Berechnung von $\Omega_6^{\bar{B}_2(M)}$ :

Satz 5.6:

$\Omega_6^{\bar{B}_2(M)}$  ist torsionsfrei.

Die durch Thom-Pontrjagin-Konstruktion, Hurewicz-Homomorphismus und Thom-Isomorphismus gegebene Abbildung

$$\begin{aligned} \Omega_6^{\bar{B}_2(M)} &\longrightarrow \pi_6(M(\mathbb{S} \times \delta_{Spin})) \longrightarrow H_6(M(\mathbb{S} \times \delta_{Spin}); \mathbb{Z}) \\ &\longrightarrow H_6(K(\pi_2(M), 2) \times B Spin; \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

ist injektiv und hat endlichen Kokern.

Ist  $(x_1, \dots, x_r)$  eine Basis von  $\pi_2(M)$  und ist  $c_i \in H^2(K(\pi_2(M), 2))$  dual zu  $x_i$ , so ist eine  $\bar{B}_2(M)$ -Bordismusklass

$$\nabla_N = (\varphi, \tilde{\chi}_N): N \longrightarrow K(\pi_2(M), 2) \times B Spin$$

durch die  $\mathbb{Z}$ -wertigen Bordismuszahlen

$$\begin{aligned} \langle \varphi^*(c_i(c_j(c_k)), [N]) \rangle, \quad i \leq j \leq k \\ \langle \varphi^*c_i \cup p_1(\nabla(N) - \varphi^*(\xi)) \rangle, [N] \rangle, \quad i=1, \dots, r \end{aligned}$$

eindeutig bestimmt.

Beweis:

Für den Spin-Fall ist das Ergebnis in der Arbeit von Žubr über die Klassifikation von 6-dimensionalen 1-zusammenhängenden Spin-Mannigfaltigkeiten enthalten [Žu]. Dort wird auch genau das Bild der Bordismusinvarianten bestimmt. Da hier wegen des Problems A) über  $\pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(\#_{j=1}^r P_2 \mathbb{C})$  ein besonderes Interesse an dem Nicht-Spin-Fall vorliegt, sollen die notwendigen Schritte zur Berechnung von  $\Omega_6^{\bar{B}_2(M)}$  skizziert werden.

$\Omega_6^{\bar{B}_2(M)}$  ist über die Thom-Pontrjagin-Konstruktion isomorph zur 6-ten Homotopiegruppe des Thom-Spektrums

$$M(\mathbb{S} \times \delta_{Spin}) = M(\mathbb{S}) \wedge M Spin \quad [Bo].$$

Es gilt  $\pi_6(M(\mathbb{S}) \wedge M Spin) = M Spin_6(M(\mathbb{S}))$ , und für den  $E^2$ -Term

der Atiyah-Hirzebruch-Spektralsequenz gilt

$$E_{p,q}^2 = H_p(M(\xi); M \operatorname{Spin}_q(S^0)) = H_p(M(\xi); \Omega_q^{\operatorname{Spin}}).$$

Auf der Linie  $p+q=6$  sind die Gruppen  $E_{2,4}^2 \cong H_2(M; \mathbb{Z})$ ,

$$E_{4,2}^2 \cong H_4(K(\pi_2(M), 2); \mathbb{Z}_2) \text{ und } E_{6,0}^2 \cong H_6(K(\pi_2(M), 2); \mathbb{Z}) \text{ nichttrivial.}$$

In den freien Gruppen  $E_{2,4}^2$  und  $E_{6,0}^2$  kann kein Differential

landen. Man erhält dann, daß auch die  $(p+q=6)$ -Linie des

$E^\infty$ -Terms aus freien Gruppen  $E_{2,4}^\infty$  und  $E_{6,0}^\infty$  und eventuell einer 2-Torsions-Gruppe  $E_{4,2}^\infty$  besteht. Daraus folgt unmittelbar,

daß  $M \operatorname{Spin}_6(M(\xi)) = \pi_6(M(\xi) \wedge M \operatorname{Spin})$  höchstens 2-Torsion hat.

Der 2-primäre Anteil von  $\pi_6(M(\xi) \wedge M \operatorname{Spin})$  soll mit Hilfe der

Adams- $\mathbb{Z}_2$ -Spektralsequenz berechnet werden. Ab jetzt wird in

diesem Beweis stets Kohomologie mit  $\mathbb{Z}_2$ -Koeffizienten verwendet.

Sei  $A$  die  $\mathbb{Z}_2$ -Steenrod-Algebra und  $A_1$  die Unteralgebra von  $A$ ,

die von  $Sq^1$  und  $Sq^2$  erzeugt wird. Ferner sei  $B = A_1/A_1 \cdot Sq^1$ .

Der  $E^2$ -Term der Adams-Spektralsequenz ist durch

$$E_2^{s,t} = \operatorname{Ext}_A^{s,t}(H^*(M(\xi) \wedge M \operatorname{Spin}); \mathbb{Z}_2) \text{ gegeben.}$$

$$\text{Es gilt } H^*(M(\xi) \wedge M \operatorname{Spin}) = H^*(M(\xi)) \otimes H^*(M \operatorname{Spin}).$$

Bis zur Dimension 7 stimmt die Kohomologie von  $M \operatorname{Spin}$  mit

$$(A/A \cdot A_1)_{* \leq 7} \text{ überein [Pe].}$$

$$\text{Dann gilt für } t-s \leq 7 \quad \operatorname{Ext}_A^{s,t}(H^*(M(\xi)) \otimes H^*(M \operatorname{Spin}); \mathbb{Z}_2)$$

$$= \operatorname{Ext}_A^{s,t}(H^*(M(\xi)) \otimes A/A \cdot A_1; \mathbb{Z}_2) \cong \operatorname{Ext}_{A_1}^{s,t}(H^*(M(\xi)); \mathbb{Z}_2).$$

Der letzte Isomorphismus ist durch Ringwechsel gegeben, wobei

$$A_1 \text{ auf } H^*(M(\xi)) \text{ von links operiert [Sw].}$$

Da  $M(\xi)$  nur Kohomologie in geraden Dimensionen hat, operiert

$$Sq^1 \text{ trivial, d.h. } H^*(M(\xi)) \text{ ist ein } B\text{-Modul.}$$

Zur Berechnung von  $\operatorname{Ext}_{A_1}^{s,t}(H^*(M(\xi)); \mathbb{Z}_2)$  wird nun ein Hilfssatz eingeschoben.

Sei  $U_t$ , bzw.  $V_t$  der  $B$ -Modul mit einem Erzeuger  $a_t$  in Graduierung  $2t$

und  $Sq^2 a_t \neq 0$ , bzw.  $Sq^2 a_t = 0$ . Auf  $\mathbb{Z}_2$ -Tensorprodukten operiere

$Sq^2$  mittels der Cartan-Formel.

Hilfssatz 5.7:

a) Es gilt  $U_t \otimes V_s = U_{t+s}$  und  $U_t \otimes U_s = U_{t+s} \oplus U_{t+s+1}$ .

b) Sei  $\gamma^1 \rightarrow K(\mathbb{Z}, 2) = P_\infty \mathbb{C}$  das kanonische Linienbündel und

$\xi \rightarrow K(\mathbb{Z}, 2)$  das triviale Bündel. Dann gilt

$$H^*(M(\gamma^1)) = \bigoplus_{t=0}^{\infty} U_{2t} \quad \text{und} \quad H^*(M(\xi)) = V_0 \oplus \bigoplus_{t=1}^{\infty} U_{2t-1}.$$

c) Im Fall  $w_2(M) \neq 0$  ist  $H^*(M(\xi))$  isomorph zu einer direkten Summe von Moduln  $U_t$ .

Ist  $M$  eine Spin-Mannigfaltigkeit, so ist  $H^*(M(\xi))$  isomorph zu  $V_0 \oplus U$ , wobei  $U$  eine direkte Summe von Moduln  $U_t$  ist.

Beweis von Hilfsatz 5.7:

a)  $U_t \otimes V_s$  ist als  $\mathbb{Z}_2$ -Vektorraum isomorph zu  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  mit Basiselementen  $a_t \otimes a_s$  in Graduierung  $2(t+s)$  und  $Sq^2 a_t \otimes a_s$  in Graduierung  $2(t+s+1)$ . Wegen  $Sq^2(a_t \otimes a_s) = Sq^2 a_t \otimes a_s + a_t \otimes Sq^2 a_s = Sq^2 a_t \otimes a_s$  folgt  $U_t \otimes V_s \cong U_{t+s}$ .

$U_t \otimes U_s$  hat  $\mathbb{Z}_2$ -Erzeuger  $a_t \otimes a_s$ ,  $a_t \otimes Sq^2 a_s$ ,  $Sq^2 a_t \otimes a_s$ ,  $Sq^2 a_t \otimes Sq^2 a_s$ . Wegen  $Sq^2(a_t \otimes a_s) = a_t \otimes Sq^2 a_s + Sq^2 a_t \otimes a_s$  und  $Sq^2(a_t \otimes Sq^2 a_s) = Sq^2 a_t \otimes Sq^2 a_s$  folgt  $U_t \otimes U_s = U_{t+s} \oplus U_{t+s+1}$ , wobei  $U_{t+s}$  von  $a_t \otimes a_s$  und  $U_{t+s+1}$  von  $a_t \otimes Sq^2 a_s$  erzeugt wird.

b)  $H^*(M(\gamma^1))$  hat  $\mathbb{Z}_2$ -Erzeuger  $\zeta^n$   $U \in H^{2n}(M(\gamma^1))$ , wobei  $U \in H^0(M(\gamma^1))$  die Thom-Klasse ist.

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } Sq^2(\zeta^{2t} U) &= (Sq^2 \zeta) \zeta^{2t-1} U + \zeta Sq^2(\zeta^{2t-1} U) \\ &= \zeta^{2t+1} U + \zeta Sq^2(\zeta^{2t-1} U). \end{aligned}$$

Wegen  $Sq^2(U) = w_2(\gamma^1) \cdot U = \zeta U$  und  $Sq^2(\zeta \cdot U) = 0$  folgt daraus die Behauptung für  $M(\gamma^1)$  durch Induktion.

Im Fall des trivialen Bündels ergibt sich die Behauptung mit Hilfe von  $Sq^2 U = 0$  analog.

c) Ist  $w_2(M) \neq 0$ , so läßt sich nach geeigneter Basiswahl

$$\xi \longrightarrow K(\mathbb{Z}, 2) \times \dots \times K(\mathbb{Z}, 2) \text{ in der Form } \xi = \gamma_1 \times \gamma_2 \times \dots \times \gamma_s \\ \times \varepsilon_1 \times \dots \times \varepsilon_{r-s}$$

wählen. Dann ist  $H^*(M(\xi)) = \bigotimes_{i=1}^s H^*(M(\gamma_i)) \otimes \bigotimes_{i=1}^{r-s} H^*(M(\varepsilon_i))$ ,

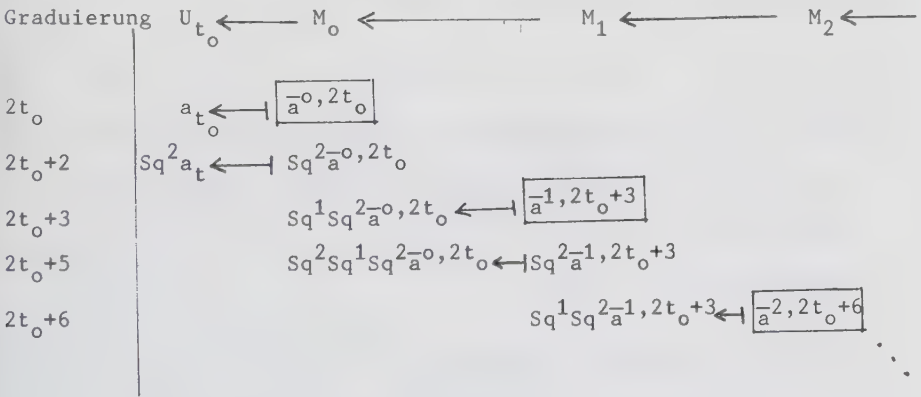
wobei  $Sq^2$  über die Cartanformel auf dem Tensorprodukt operiert.

Mit Hilfe von a) und b) folgt nun unmittelbar die Behauptung.

q.e.d.

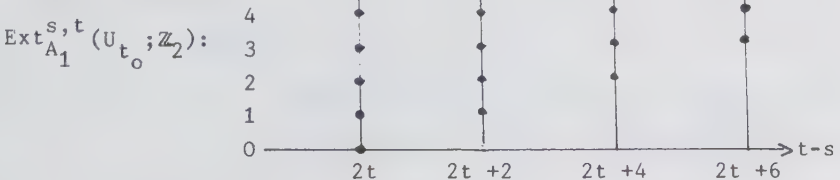
Für die Berechnung von  $\text{Ext}_{A_1}^{s,t}(H^*(M(\xi); \mathbb{Z}_2))$  muß also im Fall  $w_2(M) \neq 0$  nur  $\text{Ext}_{A_1}^{s,t}(U_{t_0}; \mathbb{Z}_2)$  berechnet werden.

Folgendem Tableau entnimmt man, daß es eine fast-freie minimale periodische Auflösung von  $U_{t_0}$  mit Erzeugern  $\bar{a}^{-i, 2t_0+3i}; i \geq 0$  gibt (Vgl. [St]).



Ein freier B-Summand, erzeugt von  $\bar{a}^{-i, 2t_0+3i}$ , liefert für

$\text{Ext}_{A_1}^{s,t}(U_{t_0}; \mathbb{Z}_2)$  einen Turm in Dimension  $t-s = 2t_0+2i$ , der in Filtrierung  $i$  beginnt.



Folgerung:  $\text{Ext}_A^{s,t}(H^*(M(\mathbb{S}) \wedge M \text{Spin}); \mathbb{Z}_2)$  hat für  $t-s \leq 7$  nur Türme in gerader Dimension. Insbesondere sind alle Differentiale null. Da es keine ungerade Torsion gibt, folgt also, daß

$\pi_6(M(\mathbb{S}) \wedge M \text{Spin})$  torsionsfrei ist.

Da der Hurewicz-Homomorphismus  $\pi_*^*(M(\mathbb{S} \times \delta_{\text{spin}})) \longrightarrow H_*^*(M(\mathbb{S} \times \delta_{\text{spin}}; \mathbb{Z}))$  rational stets ein Isomorphismus ist, folgen die übrigen Aussagen ohne weiteres. Insbesondere sind die  $\mathbb{Z}$ -wertigen B-Bordismuszahlen die einzigen Bordismusinvarianten von  $\Omega_6^{\overline{B}_2}(M)$ . q.e.d.

Sei  $K\pi_2(M)$  der Kern von  $(\nu_M)_*: \pi_2(M) \longrightarrow \pi_2(BO)$ .

Sei  $\lambda: K\pi_2(M) \longrightarrow \Omega_6^{B_2}(M)$  die im Beweis von Satz 5.5 definierte Abbildung und  $\bar{\lambda} = h_* \circ \lambda: K\pi_2(M) \longrightarrow \Omega_6^{\overline{B}_2}(M)$  (vgl. 5.1).

Hilfssatz 5.8:

a) Für  $\alpha \in K\pi_2(M)$  ist  $\lambda(\alpha) \in \Omega_6^{B_2}(M)$  durch eine  $B_2(M)$ -Mannigfaltigkeit  $\lambda(\alpha): D_+^2 \times M \xrightarrow{\text{Id}} D_+^2 \times M = S^2 \times M \longrightarrow B_2(M)$  gegeben, so daß

$$\lambda(\alpha)_*|_{\pi_2(M)} = (\bar{\nu}_M)_* \quad \text{und}$$

$$\lambda(\alpha)_*[S^2 \times \{x_0\}] = (\bar{\nu}_M)_*(\alpha)$$

gilt.

b)  $\bar{\lambda}: K\pi_2(M) \longrightarrow \Omega_6^{\overline{B}_2}(M)$  ist injektiv.

Beweis:

a) Es gilt  $K\pi_2(M) \cong \pi_2(F_2)$  (Hilfssatz 5.2):

Ist  $\alpha \in K\pi_2(M)$ , so gibt es eine eindeutig bestimmte Homotopieklasse  $\alpha': S^2 \xrightarrow{i} F_2 \hookrightarrow B_2(M)$  mit  $[\alpha'] = (\bar{\nu}_M)_*(\alpha)$ .

Wir können  $\alpha'$  so wählen, daß  $\alpha'|_{D_+^2} = \bar{\nu}_2|_{D_+^2}$ .

Sei  $\alpha'_+ = \alpha'|_{D_+^2}: D_+^2 \longrightarrow F_2 \hookrightarrow B_2(M)$ .

$\alpha_+^1$  läßt sich eindeutig zu einem Lift  $\bar{\alpha}_+ : D_+^2 \times M \longrightarrow B_2(M)$  mit  $\bar{\alpha}_+|_{D_+^2} = \alpha_+^1$  und  $\bar{\alpha}_+|_{S^1 \times M} = \bar{\alpha}_2$  fortsetzen (Hilfssatz 4.8.a) und 4.2).

Nach Definition von  $\lambda$  gilt dann

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha) &= \eta \circ \alpha_2(\bar{\alpha}_+) = \eta(D_+^2 \times M, \bar{\alpha}_+, \text{Id}) = (D_+^2 \times M \cup_{\text{Id}} D_+^2 \times M, \bar{\alpha}_+ \cup -\bar{\alpha}_2) \\ &= (S^2 \times M, \bar{\alpha}_+ \cup -\bar{\alpha}_2). \end{aligned}$$

Die  $B_2(M)$ -Struktur  $\bar{\alpha}_+ \cup -\bar{\alpha}_2$  bezeichnen wir wieder mit  $\lambda(\alpha)$ .

Es gilt  $\lambda(\alpha)|_M = \bar{\alpha}_M$ , also  $\lambda(\alpha)_*|_{\pi_2(M)} = (\bar{\alpha}_M)_*$ .

$$\begin{aligned} \text{Außerdem folgt } \lambda(\alpha)_*[S^2 \times \{x_0\}] &= [\bar{\alpha}_+ \cup -\bar{\alpha}_2|_{D_+^2 \times \{x_0\} \cup D_+^2 \times \{x_0\}}] \\ &= [\alpha_+^1 \cup -\bar{\alpha}_2|_{D_+^2 \times \{x_0\}}] = [\alpha^1] = (\bar{\alpha}_M)_*(\alpha). \end{aligned}$$

Damit ist a) bewiesen.

b) Man sieht leicht, daß es eine Basis  $(x_1, \dots, x_r)$  von

$H^2(M; \mathbb{Z})$  gibt, so daß  $x_i^2 \neq 0$  für  $i=1, \dots, r$ .

$(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  bezeichne das Zweifache der (Kronecker-) dualen Basis

von  $(x_1, \dots, x_r)$  in  $\pi_2(M) \cong H_2(M; \mathbb{Z})$ .

Dann liegt  $\alpha_i$ ,  $i=1, \dots, r$  in jedem Fall in  $K\tilde{\pi}_2(M)$ ,

und es reicht zu zeigen, daß  $\lambda$  auf dem Erzeugnis von

$(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ , das wir mit  $H$  bezeichnen, injektiv ist.

Da  $\bar{\lambda} = h_* \circ \lambda$  und  $h_*: \Omega_6^{B_2(M)} \longrightarrow \Omega_6^{\bar{B}_2(M)}$  ein Isomorphismus ist, folgt dann die Injektivität von  $\bar{\lambda}$ .

Nach Teil a) des Hilfssatzes gilt

$$\lambda(\alpha_i)_*(k_*(\alpha_j)) = (\bar{\alpha}_M)_*(\alpha_j) \quad (k: M \hookrightarrow S^2 \times M \text{ Inklusion}) \text{ und}$$

$$\lambda(\alpha_i)_*[S^2 \times \{x_0\}] = (\bar{\alpha}_M)_*(\alpha_i) \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, r.$$

Dann folgt in Kohomologie

$$\lambda(\alpha_i)^*(\zeta_j) = x_j' + 2 \delta_{ij} \delta'.$$

Dabei ist  $\zeta_j$  durch  $(\bar{\alpha}_M)^*(\zeta_j) = x_j$  gegeben,

$x_j'$  durch  $P_M^*(x_j)$  ( $P_M: S^2 \times M \rightarrow M$  Projektion) und

$\delta'$  durch  $\delta' = P_{S^2}^*(\delta)$  ( $P_{S^2}: S^2 \times M \rightarrow S^2$  Projektion,  $\delta \in H^2(S^2)$  Erzeuger).

Es folgt  $\langle \lambda(\mathfrak{d}_i)^*(\ell_i^3), [S^2_{xM}] \rangle = \langle (x_i' + 2\mathfrak{d}')^3, [S^2_{xM}] \rangle$   
 $= \langle x_i'^3 + 6x_i'^2\mathfrak{d}' + 12x_i'\mathfrak{d}'^2 + 8\mathfrak{d}'^3, [S^2_{xM}] \rangle.$

Es gilt  $x_i'^3 = p_M^*(x_i^3) = 0$ , da  $x_i^3 \in H^6(M; \mathbb{Z}) = \{0\}$ .

Ebenso folgt  $\mathfrak{d}'^2 = 0$  und  $\mathfrak{d}'^3 = 0$ .

Also erhalten wir

$$\langle \lambda(\mathfrak{d}_i)^*(\ell_i^3), [S^2_{xM}] \rangle = 6 \langle x_i'^2 \mathfrak{d}', [S^2_{xM}] \rangle = 6 \langle x_i'^2, [M] \rangle \cdot \langle \mathfrak{d}', [S^2] \rangle$$

$$= 6 \langle x_i'^2, [M] \rangle \neq 0 \text{ nach Wahl von } (x_1, \dots, x_r).$$

Außerdem folgt für  $i \neq j$

$$\langle \lambda(\mathfrak{d}_i)^*(\ell_j^3), [S^2_{xM}] \rangle = \langle x_i'^3, [S^2_{xM}] \rangle = 0.$$

Also liefern die zu  $(\ell_1^3, \dots, \ell_r^3)$  gehörenden Bordismusinvarianten eine Abbildung  $\omega: \Omega_6^{B_2(M)} \rightarrow \mathbb{Z}^r$ , so daß  $\omega \circ \lambda|_H$  injektiv ist.

Daraus folgt die Injektivität von  $\lambda$ .

q.e.d.

E) Vergleich von  $\pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(\#_{j=1}^r P_2\mathbb{C})$  und  $\pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(\#_{j=1}^r P_2\mathbb{C} \text{ rel } \bigcup_{j=1}^{r-1} S_j^3)$ :

$M_r = \#_{j=1}^r P_2\mathbb{C}$  entstehe aus  $\bigcup_{j=1}^r P_2\mathbb{C}$  durch zusammenhängende Summe längs disjunkter Sphären  $\bigcup_{j=1}^r S_j^3 = X$ . Die in § 5, A) motivierte Frage, ob  $\pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M_r \text{ rel } X) \rightarrow \pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M_r)$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  ein Isomorphismus ist, wird durch folgenden Satz negativ beantwortet.

Satz 5.10:

Es gilt  $\text{rg } \pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M_r) = N(r)$  mit  $N(r) = \text{rg } H_6(K(\mathbb{Z}^r, 2); \mathbb{Z})$

und  $\text{rg } \pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M_r \text{ rel } X) \leq 3r-2$ .

Insbesondere sind für  $r \geq 3$   $\pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M_r)$  und  $\pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M_r \text{ rel } X)$  nicht isomorph, da für  $r \geq 3$   $N(r) > 3r-2$ .

Zum Beweis von Satz 5.10 benötigen wir folgenden Hilfssatz, der eingeschoben werden soll.

Hilfssatz 5.11:

Sei  $M$  eine 1-zusammenhängende 4-Mannigfaltigkeit und  $x_0$  und  $y_0$  zwei Punkte in  $M$ . Dann gilt

$$a) \operatorname{rg} \pi_1 \widetilde{\operatorname{Diff}}(M \operatorname{rel} \{x_0\}) \leq \operatorname{rg} \pi_1 \widetilde{\operatorname{Diff}}(M) + \operatorname{rg} \pi_2(M)$$

$$b) \operatorname{rg} \pi_1 \widetilde{\operatorname{Diff}}(M \operatorname{rel} \{x_0, y_0\}) \leq \operatorname{rg} \pi_1 \widetilde{\operatorname{Diff}}(M) + 2 \operatorname{rg} \pi_2(M).$$

Beweis:

Die Auswertungsabbildung an der Stelle  $x_0$  liefert eine exakte Sequenz  $\pi_2(M) \longrightarrow \pi_1 \widetilde{\operatorname{Diff}}(M, \{x_0\}) \longrightarrow \pi_1 \widetilde{\operatorname{Diff}}(M) \longrightarrow \pi_1(M) = \{1\}$  ( $\widetilde{\operatorname{Diff}}(M, \{x_0\}) \longrightarrow \widetilde{\operatorname{Diff}}(M) \longrightarrow M$  ist Blockfaserung, Vgl. [B.L.R]).

Aus dieser Sequenz folgt  $\operatorname{rg} \pi_1 \widetilde{\operatorname{Diff}}(M, \{x_0\}) \leq \operatorname{rg} \pi_1 \widetilde{\operatorname{Diff}}(M) + \operatorname{rg} \pi_2(M)$ .

Durch das Differential an der Stelle  $x_0$  bekommt man eine exakte

$$\begin{aligned} \text{Sequenz } \pi_2 GL_4(\mathbb{R}) &\longrightarrow \pi_1 \widetilde{\operatorname{Diff}}(M \operatorname{rel} \{x_0\}) \longrightarrow \pi_1 \widetilde{\operatorname{Diff}}(M, \{x_0\}) \\ &\longrightarrow \pi_1 GL_4(\mathbb{R}) \quad (\text{Vgl. [B.L.R]}) \end{aligned}$$

und aus  $\pi_2 GL_4(\mathbb{R}) = 0$  und  $\pi_1 GL_4(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}_2$  folgt

$$\operatorname{rg} \pi_1 \widetilde{\operatorname{Diff}}(M \operatorname{rel} \{x_0\}) = \operatorname{rg} \pi_1 \widetilde{\operatorname{Diff}}(M, \{x_0\}).$$

Zusammen folgt daraus die Abschätzung a).

Die Abschätzung b) erhält man aus den analogen Sequenzen

$$\begin{aligned} \pi_2(M \times M) &\longrightarrow \pi_1 \widetilde{\operatorname{Diff}}(M, \{x_0, y_0\}) \longrightarrow \pi_1 \widetilde{\operatorname{Diff}}(M) \longrightarrow 0 \quad \text{und} \\ 0 &\longrightarrow \pi_1 \widetilde{\operatorname{Diff}}(M \operatorname{rel} \{x_0, y_0\}) \longrightarrow \pi_1 \widetilde{\operatorname{Diff}}(M, \{x_0, y_0\}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \end{aligned}$$

die man durch die Auswertungsabbildung, bzw. durch das Differential an den Stellen  $x_0$  und  $y_0$  erhält.

q.e.d.

Beweis von Satz 5.10:

Aus der exakten Sequenz  $0 \longrightarrow K\pi_2(M) \longrightarrow \Omega_6 \bar{B}_2(M) \longrightarrow \pi_1 \widetilde{\operatorname{Diff}}(M) \longrightarrow 0$

(Satz 5.5) folgt  $\operatorname{rg} \pi_1 \widetilde{\operatorname{Diff}}(M_r) = \operatorname{rg} \Omega_6 \bar{B}_2(M_r) - r$ , und aus

Satz 5.6 ergibt sich  $\operatorname{rg} \Omega_6 \bar{B}_2(M_r) = \operatorname{rg} H_6(K(\mathbb{Z}^r, 2)) + r$ .

Zusammen folgt also  $\text{rg } \pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M_r) = \text{rg } H_6(K(\mathbb{Z}^r, 2)) = N(r)$ .

Wir schätzen nun den Rang von  $\pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M_r \text{ rel } X)$  ab.

Sei für  $j=1, \dots, r-1$   $D_j$  eine 4-dimensionale Scheibe im  $j$ -ten projektiven Raum und  $D'_j$  eine 4-dimensionale Scheibe im  $(j+1)$ -ten projektiven Raum, so daß der Rand jeweils  $S_j^3$  ist.

Die Einschränkungabbildung liefert eine Bijektion

$$\begin{aligned} \text{Diff}(M_r \text{ rel } X) &\xrightarrow{\Psi} \text{Diff}(P_2\mathbb{C} \text{ rel } D_1) \times \text{Diff}(P_2\mathbb{C} \text{ rel } D'_1 + D_2) \\ &\quad \times \dots \times \text{Diff}(P_2\mathbb{C} \text{ rel } D'_{r-2} + D_{r-1}) \times \text{Diff}(P_2\mathbb{C} \text{ rel } D'_{r-1}) \end{aligned}$$



indem man für  $f \in \text{Diff}(M_r \text{ rel } X)$

$f|_{P_2\mathbb{C} \setminus D'_j \cup D_{j+1}}$  auf  $P_2\mathbb{C}$  durch  $\text{Id}_{D'_j \cup D_{j+1}}$  fortsetzt ( $1 \leq j \leq r-2$ ) und

$f|_{P_2\mathbb{C} \setminus D_j^{(w)}}$  auf  $P_2\mathbb{C}$  durch  $\text{Id}_{D_j^{(w)}}$  fortsetzt ( $j=1, r-1$ ).

Durch  $\Psi$  erhält man einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M_r \text{ rel } X) &\cong \pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(P_2\mathbb{C} \text{ rel } D_1) \times \pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(P_2\mathbb{C} \text{ rel } D'_1 + D_2) \\ &\quad \times \pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(P_2\mathbb{C} \text{ rel } D'_{r-2} + D_{r-1}) \times \pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(P_2\mathbb{C} \text{ rel } D'_{r-1}). \end{aligned}$$

Aus Hilfssatz 5.11 folgt wegen  $\pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(P_2\mathbb{C} \text{ rel } D'_j + D_{j+1})$

$$\cong \pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(P_2\mathbb{C} \text{ rel } \{x_0, y_0\}) \quad \text{rg } \pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(P_2\mathbb{C} \text{ rel } D'_j + D_{j+1}) \leq 3$$

und ebenso  $\text{rg } \pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(P_2\mathbb{C} \text{ rel } D_j) \leq 2$ . Aus diesen Rangabschätzungen

folgt nun für  $r \geq 2$   $\text{rg } \pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M_r \text{ rel } X) \leq 2 + (r-2) \cdot 3 + 2 = 3r-2$ .

Es gilt  $N(3) = 10$  und  $\text{rg } H_4(K(\mathbb{Z}^3, 2)) = 6$ . Daraus folgt für  $r \geq 3$

$$\text{wegen } K(\mathbb{Z}^{r+1}, 2) = K(\mathbb{Z}^r, 2) \times K(\mathbb{Z}, 2) \quad N(r+1) \geq N(r) + \text{rg } H_4(K(\mathbb{Z}^r, 2))$$

$$\geq N(r) + 6 \text{ und daraus } N(3+s) \geq 10 + 6s > 7 + 3s = 3(3+s) - 2$$

für  $s \geq 0$ .

q.e.d.

# F) Vergleich mit dem klassischen Verfahren:

Wenn man das klassische Verfahren zur Bestimmung von  $\pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M)$  für 1-zusammenhängende 4-Mannigfaltigkeiten verwenden will, ist das Hauptproblem die Berechnung von  $\pi_1 \text{aut}(M)$  und  $\pi_2 \text{aut}(M)$ . Zur Berechnung der Homotopiegruppen der Homotopieäquivalenzen, die eine eingebettete Scheibe festlassen, gibt es in  $[A, B, K]$  einen Satz.

Sei  $V \subset M$  eine abgeschlossene Kodimension-0-Mannigfaltigkeit mit Rand und  $\text{aut}(M \text{ rel } V)$  die Homotopieäquivalenzen von  $M$ , die  $V$  punktweise festlassen.

Hat  $M \setminus \mathring{V}$  den Homotopietyp eines Wedges von Sphären, so wird behauptet, daß es für  $i \geq 1$  einen Isomorphismus

$$\pi_i \text{aut}(M \text{ rel } V) \cong \left[ \sum_{j=1}^i (M/V)_j, M \setminus \mathring{V} \right]$$

gibt. ( $[A, B, K]$ , Cor. D13, Seite 123)

Der Vergleich der Berechnung der Blockdiffeomorphismen mittels relativer Normalen-2-Smoothings mit dem klassischen Verfahren führt zu der Entdeckung, daß dieses Resultat nicht richtig sein kann.

## Hilfssatz 5.12:

Sei  $M$  eine 1-zusammenhängende 4-dimensionale Mannigfaltigkeit und  $D^4 \subset M$  eine eingebettete Scheibe. Dann gilt:

a)  $\pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M \text{ rel } D^4) \longrightarrow \pi_1 \text{aut}(M \text{ rel } D^4)$  ist surjektiv.

b) Sei  $Y = \bigvee_{j=1}^r S_j^2$  mit  $r = \text{rg } \pi_2(M)$ .

Ist  $[ZM, Y]$  abelsch, so gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \pi_5(Y) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow [ZM, Y] \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^r \pi_3(Y) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow 0.$$

Beweis: Es soll die modifizierte Surgery-Sequenz aus  $[A, B, K]$  zur Bestimmung von  $\pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M \text{ rel } D^4)$  verwendet werden. Wegen

Lemma 3.6.10 in  $[A, B, K]$  ist  $\pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M \text{ rel } D^4) \longrightarrow \pi_1 \text{aut}(M \text{ rel } D^4)$  surjektiv, wenn  $\mathfrak{S}(D^1 \times (M \setminus D^4); \partial)$  null ist.

$[D^1 \times (M \setminus D^4); \partial(D^1 \times (M \setminus D^4))]$  ist eine 5-dimensionale 2-ade, also ist die Surgery-Sequenz

$$L_6(e) \xrightarrow{\partial} \mathfrak{S}(D^1 \times (M \setminus D^4), \partial) \longrightarrow [\Sigma^M / D^4, G/O]$$

an der Stelle  $\mathfrak{S}(D^1 \times (M \setminus D^4), \partial)$  exakt ( $[W_{a_1}, \text{Thm. } 10.3, 10.5, 10.6]$ ).

Wegen der Existenz einer gerahmten 6-dimensionalen Arf-Invarianten-1-Mannigfaltigkeit ist  $\partial$  die Nullabbildung, d.h. es bleibt

$$[\Sigma^M, G/O] = 0 \text{ zu zeigen.}$$

Es gibt eine Kofasersequenz

$$S^3 \xrightarrow{\varphi} \bigvee_{j=1}^r S_j^2 \longrightarrow M,$$

wobei  $(S_j^2 \rightarrow M)_{j=1}^r$  eine Basis von  $\pi_2(M)$  repräsentiert.

Durch Suspendieren erhält man eine Kofasersequenz

$$(*) \quad S^4 \xrightarrow{\Sigma \varphi} \bigvee_{j=1}^r S_j^3 \longrightarrow \Sigma M.$$

Daraus ergibt sich eine exakte Sequenz

$$\left[ \bigvee_{j=1}^r S_j^3, G/O \right] \longleftarrow [\Sigma^M, G/O] \longleftarrow [S^5, G/O]$$

Da  $\pi_3(G/O) = \{0\}$  und  $\pi_5(G/O) = \{0\}$ , folgt  $[\Sigma^M, G/O] = \{0\}$ .

Damit ist Teil a) der Behauptung bewiesen.

Wir verwenden nun die Kofasersequenz (\*) zur Bestimmung von

$[\Sigma^M, Y]$ ,  $Y = \bigvee_{j=1}^r S_j^2$ , und erhalten eine exakte Sequenz

$$[S^4, Y] \xleftarrow{(\Sigma \varphi)^*} \left[ \bigvee_{j=1}^r S_j^3, Y \right] \longleftarrow [\Sigma^M, Y] \longleftarrow [S^5, Y] \xleftarrow{(\Sigma^2 \varphi)^*} \left[ \bigvee_{j=1}^r S_j^3, Y \right].$$

Sei  $\eta_j: S^3 \longrightarrow S_j^3$  die Hopfabildung und  $[\iota_i, \iota_j]: S^3 \longrightarrow S_1^3 \vee S_j^3 \hookrightarrow Y$  das entsprechende Whiteheadprodukt. Gilt  $\varphi = \sum_{i=1}^r \lambda_i \eta_i + \sum_{i,j} \mu_{i,j} [\iota_i, \iota_j]$ , so folgt  $\Sigma \varphi = \sum_{i=1}^r \lambda_i (\Sigma \eta_i) \cdot \Sigma \eta_i: S^4 \longrightarrow S_1^3$  hat jedoch Ordnung 2,

d.h.  $\text{Bild}(\Sigma \varphi)^*$  und ebenso  $\text{Bild}(\Sigma^2 \varphi)^*$  ist 2-Torsion. Insbesondere ist  $(\Sigma \varphi)^* \otimes \text{Id}_{\mathbb{Q}}$  und  $(\Sigma^2 \varphi)^* \otimes \text{Id}_{\mathbb{Q}}$  die Nullabbildung.

Ist  $[\Sigma^M, Y]$  abelsch, so erhalten wir also nach Tensorieren mit  $\mathbb{Q}$  für  $[\Sigma^M, Y] \otimes \mathbb{Q}$  die Sequenz

$$0 \longrightarrow \pi_5(Y) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow [\Sigma^M, Y] \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^r \pi_3(Y) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow 0.$$

q.e.d.

Folgerung:

Ist die anheftende Abbildung  $\mathcal{V}$  von der Form  $\sum_{i,j} \mu_{ij} [\iota_i, \iota_j]$   
 (z.B.  $M = \#_{j=1}^s S^2 \times S^2$ ,  $r = 2s$ ), so gilt  $\Sigma M \simeq \bigvee_{j=1}^r S_j^2 \vee S^5$ ,

d.h. in diesem Fall ist  $[\Sigma M, Y]$  abelsch.

Wegen  $\text{rg } \pi_3(\bigvee_{j=1}^r S_j^2) = \frac{r(r+1)}{2}$  ergibt sich aus Hilfssatz 5.12.b)  
 $\text{rg } [\Sigma M, \bigvee_{j=1}^r S_j^2] \geq \frac{1}{2} r^2 (r+1)$ .

Ist  $M$  eine 1-zusammenhängende 4-Mannigfaltigkeit, so hat  $M \setminus \mathring{D}^4$   
 den Homotopietyp von  $\bigvee_{j=1}^r S_j^2$ . Falls  $\pi_1 \text{aut}(M \text{ rel } D^4) \cong [\Sigma(M/D^4), M \setminus \mathring{D}^4]$   
 $\cong [\Sigma M, \bigvee_{j=1}^r S_j^2]$  gilt, folgt aus Teil a) von Hilfssatz 5.12  
 (\*)  $\text{rg } \pi_1 \text{Diff}(M \text{ rel } D^4) \geq \frac{1}{2} r^2 (r+1)$ .

Aus Hilfssatz 5.11 und Satz 5.5 erhält man

(\*\*)  $\text{rg } \pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M \text{ rel } D^4) \leq \text{rg } H_6(K(\mathbb{Z}^r, 2)) + r = N(r) + r$ .

Aus der Rekursionsformel

$$\begin{aligned} N(r+1) &= N(r) + \text{rg } H_4(K(\mathbb{Z}^r, 2)) + \text{rg } H_2(K(\mathbb{Z}^r, 2)) + \text{rg } H_0(K(\mathbb{Z}^r, 2)) \\ &= N(r) + \frac{1}{2} r(r+1) + r + 1 \end{aligned}$$

erhält man mit  $N(3) = 10$  durch einfache Induktion,

daß für  $r \geq 3$   $N(r) + r < \frac{1}{2} r^2 (r+1)$  gilt.

Deshalb ergibt sich zusammen mit (\*) und (\*\*) ein Widerspruch.

Also ist  $\pi_1 \text{aut}(M \text{ rel } D^4) \cong [\Sigma M, \bigvee_{j=1}^r S_j^2]$  im allgemeinen  
 nicht richtig.

Bemerkung:

Im Beweis für  $\pi_1 \text{aut}(M \text{ rel } V) \cong [\Sigma^1(M/V), M \setminus \mathring{V}]$ , falls  $M \setminus \mathring{V}$   
 homotopieäquivalent zu einem Wedge von Sphären, in  $[A, B, K]$   
 wird benutzt, daß auf  $\text{Map}(\partial V, M \setminus \mathring{V})$ , der Menge der stetigen  
 Abbildungen von  $\partial V$  nach  $M \setminus \mathring{V}$ , eine H-Raum-Struktur durch die  
 Co-H-Raum-Struktur auf dem Sphärenwedge induziert wird  
 ( $[A, B, K]$ , Seite 123). Dafür gibt es keinen offensichtlichen  
 Grund.

§ 6 Hochzusammenhängende Mannigfaltigkeiten -  
einige rationale Berechnungen von  
Blockdiffeomorphismen

Im ersten Teil dieses Paragraphen soll für genügend hochzusammenhängende Mannigfaltigkeiten  $\pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M)$  in dem Dimensionsbereich beschrieben werden, der im wesentlichen durch die B-Bordismusgruppen bestimmt ist. Im zweiten Teil wird davon bei der Berechnung von  $\pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M) \otimes \mathbb{Q}$  bei geeigneten Mannigfaltigkeiten Gebrauch gemacht.

A) Exakte Sequenzen für  $\pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M)$ :

Wir arbeiten in diesem Abschnitt mit dem kleinstmöglichen Normalen-k-Typ von M. Analoge Ergebnisse sind für die höheren Normalen-k-Typen möglich. Aus Gründen der Darstellung unterscheiden wir die Fälle  $n+i \equiv 0 \pmod{2}$  und  $n+i \equiv 1 \pmod{2}$ .

Satz 6.1:

Sei  $M^n$  eine n-dimensionale (s-1)-zusammenhängende Mannigfaltigkeit und  $F_k \longrightarrow B_k \xrightarrow{P} B0$  der Normalen-k-Typ von M.

$n+i$  sei gerade,  $n+i \geq 6$ ,  $s > 1$  und  $k = \frac{n+i}{2} - 1$ .

Für  $n+i \equiv 2 \pmod{4}$ ,  $n+i \neq 6, 14$ , sei ferner  $S(D^i \times M)$  minimal, und für  $n+i = 6, 14$  sei  $H_{\frac{n+i}{2}}(M; \mathbb{Z}) = \{0\}$ .

Der Kern der Surgery-Invariante  $\Theta: \mathcal{Q}_{n+i}^{B_k} \longrightarrow L_{i,n}^{(k)}(M)$  werde mit  $\hat{\mathcal{Q}}_{n+i}^{B_k}$  bezeichnet.

Falls  $i > n-2s$ , so gibt es eine exakte Sequenz

$$(i) \quad \pi_1(F_k) \xrightarrow{\bar{\alpha}_i} \hat{\mathcal{Q}}_{n+i}^{B_k} \xrightarrow{\bar{\beta}_i} \pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M) \xrightarrow{\bar{\gamma}_{i-1}} \pi_{i-1}(F_k) .$$

Insbesondere erhält man, falls zusätzlich  $i \leq s-1$  ist, eine exakte Sequenz

$$(ii) \quad \pi_i(SO) \longrightarrow \widehat{\Omega}_{n+i}^{B_k} \longrightarrow \pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M) \longrightarrow \pi_{i-1}(SO).$$

Für  $i > n-2s+2$  gibt es eine Abbildung

$$\bar{\alpha}_{i-1}: \pi_{i-1}(F_k) \longrightarrow \text{NS}_k(D^{i-1} \times M; \bar{\nu}_{i-1}) \quad \text{mit}$$

$$(iii) \quad \text{Kern } \bar{\alpha}_{i-1} = \text{Bild } \bar{\gamma}_{i-1}: \pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M) \longrightarrow \pi_{i-1}(F_k).$$

Beweis:

Für  $i > n-2s$  ist  $k-i+1 = \frac{n+i}{2} - 1 - i + 1 = \frac{n-i}{2} < s$ , und da

$M$   $(s-1)$ -zusammenhängend ist, folgt mit Hilfssatz 4.8.a),

daß  $\phi_k^i: \text{Aut}((B_k, p) \text{rel } \bar{\nu}_i) \longrightarrow \pi_i(F_k)$  ein Isomorphismus ist.

Nach Hilfssatz 4.8.b) ist  $\phi_k^{i-1}: \text{Aut}((B_k, p) \text{rel } \bar{\nu}_{i-1}) \longrightarrow \pi_{i-1}(F_k)$

zumindest noch injektiv, so daß wir aus Satz 4.5' für

$\pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M)$  eine exakte Sequenz

$$(*) \quad \pi_i(F_k) \xrightarrow{\alpha_i^!} \text{NS}_k(D^i \times M; \bar{\nu}_i) \xrightarrow{\beta_i} \pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M) \xrightarrow{\bar{\gamma}_{i-1}} \pi_{i-1}(F_k)$$

erhalten.  $\alpha_i^!$  ist durch  $\alpha_i \circ (\phi_k^i)^{-1}$  gegeben.

Wegen  $L_{i+1,n}^{(k)}(M) = L_{n+i+1}(e) = \{0\}$  und der Zusatzbedingung an  $M$

für  $n+i \equiv 2 \pmod{4}$  erhalten wir aus der Surgery-Sequenz für

relative Normalen- $k$ -Smoothings (Satz 3.7) eine exakte

$$\text{Sequenz } 0 \longrightarrow \text{NS}_k(D^i \times M; \bar{\nu}_i) \longrightarrow \widehat{\Omega}_{n+i}^{B_k} \xrightarrow{\omega} L_{i,n}^{(k)}(M),$$

$$\text{also } \text{NS}_k(D^i \times M; \bar{\nu}_i) \cong \widehat{\Omega}_{n+i}^{B_k}.$$

Zusammen mit  $(*)$  ist damit die exakte Sequenz (i) bereits

hergeleitet.  $\bar{\alpha}_i$  ist durch  $\gamma \cdot \alpha_i \circ (\phi_k^i)^{-1}$  gegeben.

Mit Hilfe der Faserhomotopiesequenz zu  $F_k \longrightarrow B_k \longrightarrow BO$

erhält man für  $i \leq s-1$   $\pi_i(F_k) \cong \pi_{i+1}(BO) \cong \pi_i(SO)$  und

$\pi_{i-1}(F_k) \cong \pi_{i-1}(SO)$ , da  $\pi_j(B_k) = \{0\}$  für  $i < s$ . Daraus folgt

zusammen mit der Sequenz (i) die Sequenz (ii).

Ist  $i > n-2s+2$ , so ist  $\phi_k^{i-1}: \text{Aut}((B_k, p) \text{rel } \overline{\mathcal{V}}_{i-1}) \longrightarrow \pi_{i-1}(F_k)$  noch ein Isomorphismus (Hilfssatz 4.8.a)), und aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M) & \xrightarrow{\overline{\alpha}_{i-1}} & \text{Aut}((B_k, p) \text{rel } \overline{\mathcal{V}}_{i-1}) & \xrightarrow{\alpha_{i-1}} & \text{NS}_k(D^{i-1} \times M; \overline{\mathcal{V}}_{i-1}) \\ & \searrow \overline{\beta}_{i-1} & \downarrow \phi_k^{i-1} & \nearrow \overline{\alpha}_{i-1} & \\ & & \pi_{i-1}(F_k) & & \end{array}$$

folgt wegen der Exaktheit der oberen Zeile zusammen mit

$$\overline{\alpha}_{i-1} = \alpha_{i-1} \circ (\phi_k^{i-1})^{-1} \quad \text{Kern } \overline{\alpha}_{i-1} = \text{Bild } \overline{\beta}_{i-1}.$$

q.e.d.

Bemerkung:

Wegen der vorausgesetzten Minimaltität von  $S(D^i \times M)$  für

$n+i \equiv 2 \pmod{4}$ ,  $n+i \neq 6, 14$ ,

gilt für  $n+i \neq 6, 14$  stets

$$L_{i,n}^{(k)}(M) = L_{n+i}(e, S(D^i \times M)) = L_{n+i}(e) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } n+i \equiv 0 \pmod{4} \\ \mathbb{Z}_2, & \text{falls } n+i \equiv 2 \pmod{4} \end{cases},$$

und  $\odot: \mathcal{R}_{n+i}^{B_k} \longrightarrow L_{n+i}(e)$  ist über die Signatur, bzw. die Arf-Invariante definiert.

Für  $n+i = 6, 14$  gilt  $L_{i,n}^{(k)}(M) = \{0\}$  oder  $\mathbb{Z}_2$  (Vgl. Def. 3.3).

Satz 6.2:

Sei  $M^n$   $(s-1)$ -zusammenhängend,  $s > 1$ .

$n+i$  sei ungerade,  $n+i \geq 7$ , und  $k = \frac{n+i-1}{2}$ .

Für  $i > n-2s+1$  gibt es eine exakte Sequenz

$$(i) \quad \pi_i(F_k) \xrightarrow{\overline{\alpha}_i} \text{NS}_k(D^i \times M; \overline{\mathcal{V}}_i) \xrightarrow{\beta_i} \pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M) \xrightarrow{\overline{\beta}_{i-1}} \pi_{i-1}(F_k).$$

Gilt zusätzlich  $i \leq s-1$ , so erhält man eine exakte Sequenz

$$(ii) \quad \pi_i(SO) \longrightarrow \text{NS}_k(D^i \times M; \overline{\mathcal{V}}_i) \longrightarrow \pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M) \longrightarrow \pi_{i-1}(SO).$$

$NS_k(D^i \times M; \bar{\gamma}_i)$  berechnet sich aus der exakten Sequenz

$$\mathcal{Q}_{n+i+1}^{B_k} \xrightarrow{\Theta} L_{i+1,n}^{(k)}(M) \xrightarrow{\partial} NS_k(D^i \times M; \bar{\gamma}_i) \rightarrow \mathcal{Q}_{n+i}^{B_k} \rightarrow 0$$

Für  $n+i \equiv 3 \pmod{4}$  ist  $L_{i+1,n}^{(k)}(M) \cong \mathbb{Z}$ , und für  $n+i \equiv 1 \pmod{4}$  ist

$L_{i+1,n}^{(k)}(M) \cong \{0\}$  oder  $\mathbb{Z}_2$  (Siehe Def. 3.3.).

Bild  $\partial$  ist stets endlich.

Ist  $i > n-2s+3$ , so gibt es einen Homomorphismus

$$\bar{\alpha}_{i-1}: \pi_{i-1}(F_k) \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}_{n+i-1}^{B_k} \quad \text{mit}$$

$$(iii) \quad \text{Kern } \bar{\alpha}_{i-1} = \text{Bild } \bar{\gamma}_{i-1}: \widetilde{\pi_{i-1} \text{Diff}(M)} \rightarrow \pi_{i-1}(F_k).$$

### Beweis:

Aus den Voraussetzungen folgt, daß

$\phi_k^i: \text{Aut}((B_k, p) \text{rel } \bar{\gamma}_i) \rightarrow \pi_i(F_k)$  ein Isomorphismus und

$\phi_k^{i-1}: \text{Aut}((B_k, p) \text{rel } \bar{\gamma}_{i-1}) \rightarrow \pi_{i-1}(F_k)$  zumindest injektiv

ist (Hilfssatz 4.8). Also erhält man die Sequenz (i) aus

Satz 4.5'. (ii) ergibt sich wieder wegen  $\pi_i(F_k) \cong \pi_1(SO)$

und  $\pi_{i-1}(F_k) \cong \pi_{i-1}(SO)$  für  $i < s-1$ .

Die Sequenz für  $NS_k(D^i \times M; \bar{\gamma}_i)$  ist die Surgery-Sequenz 3.7 für diese Situation. Wegen der Existenz einer fast-parallelisierbaren geschlossenen  $(n+i+1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit

mit nichttrivialer Signatur, falls  $n+i+1 \equiv 0 \pmod{4}$ , ist

Bild  $\partial$  in jedem Fall endlich.

Ist  $i > n-2s+3$ , so ist  $\phi_k^{i-1}: \text{Aut}((B_k, p) \text{rel } \bar{\gamma}_{i-1}) \rightarrow \pi_{i-1}(F_k)$

ein Isomorphismus, und aus der Exaktheit der Sequenz 4.5'

an der Stelle  $\text{Aut}((B_k, p) \text{rel } \bar{\gamma}_{i-1})$  folgt nach Identifikation

von  $\text{Aut}((B_k, p) \text{rel } \bar{\gamma}_{i-1})$  mit  $\pi_{i-1}(F_k)$  mit  $\bar{\alpha}_{i-1} = \eta \circ \alpha_{i-1} \circ (\phi_k^{i-1})^{-1}$

Kern  $\bar{\alpha}_{i-1} = \text{Bild } \bar{\gamma}_{i-1}: \widetilde{\pi_{i-1} \text{Diff}(M)} \rightarrow \pi_{i-1}(F_k)$ .

q.e.d.

B) Rationale Berechnung von  $\widetilde{n}_{i-1} \text{Diff}(M)$  für spezielle fast-parallelisierbare Mannigfaltigkeiten:

Wir behandeln in diesem zweiten Teil von § 6 (s-1)-zusammenhängende fast-parallelisierbare Mannigfaltigkeiten, so daß  $M \setminus D^n$  homotopieäquivalent zu einem Wedge von Sphären ist. Unter Verwendung der Rationalisierung des Normalen-k-Typs einer Mannigfaltigkeit lassen sich mit diesen Methoden auch für weniger spezielle Mannigfaltigkeiten Ergebnisse erzielen. [Kr, Tr]

Hilfssatz 6.3:

Sei  $M^n$  eine (s-1)-zusammenhängende fast-parallelisierbare Mannigfaltigkeit, so daß  $M \setminus B^n$  homotopieäquivalent zu einem Wedge von Sphären ist.

Sei für  $q = s, \dots, n-s$   $K_q = K(H_q(M; \mathbb{Z}), q)$ .

Ist  $k < 2s-1 < n$ , so gibt es einen Isomorphismus

$$\Omega_{n+i}^{B_k} \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\cong} \begin{cases} H_{n+i}(K_s \times \dots \times K_k \times BO\langle k+2 \rangle; \mathbb{Q}), & \text{falls } k \leq n-s \\ H_{n+i}(K_s \times \dots \times K_{n-s} \times BO\langle k+2 \rangle; \mathbb{Q}), & \text{falls } n-s < k < 2s-1. \end{cases}$$

Bemerkung 6.4:

Die rationale Kohomologie  $H^*(BO\langle k+2 \rangle; \mathbb{Q})$  des (k+1)-zusammenhängenden Cover  $BO\langle k+2 \rangle$  über  $BO$  ist eine Polynomalgebra mit Erzeugern  $p_i$  der Dimension  $4i$  für  $i \geq \frac{k+2}{4}$ .

$H^*(K(\mathbb{Z}, q); \mathbb{Q})$  ist eine Polynomalgebra in einem Erzeuger in Dimension  $q$ , falls  $q$  gerade ist,

und eine äußere Algebra in einem Erzeuger in Dimension  $q$ , falls  $q$  ungerade ist.

Also ist durch Hilfssatz 6.3  $\Omega_{n+i}^{B_k} \otimes \mathbb{Q}$  im angegebenen

Dimensionsbereich vollständig bekannt.

Beweis von 6.3:

Nach Hilfssatz 2.3 ist  $P_k(M) \times BO\langle k+2 \rangle \xrightarrow{P\langle k+2 \rangle \circ Pr_2} BO$   
 der Normalen-k-Typ von  $M$ .  $P_k(M)$  entsteht durch Anheften von  
 Zellen an  $M$ , so daß die Inklusion  $\varphi: M \rightarrow P_k(M)$  eine  
 $(k+1)$ -Äquivalenz ist und  $\pi_q(P_k(M)) = \{0\}$  für  $q \geq k+1$ .

Sei  $\overline{\Sigma}_M = (\varphi, \overline{\gamma}_M): M \rightarrow P_k(M) \times BO\langle k+2 \rangle$  das fest gewählte  
 Normalen-k-Smoothing auf  $M$ .

Wir wollen eine Abbildung  $\mu: P_k(M) \rightarrow K_S \times \dots \times K_K$  konstruieren,  
 die in rationaler Homologie einen Isomorphismus induziert.

Weil  $\varphi: M \rightarrow P_k(M)$  eine  $(k+1)$ -Äquivalenz ist, induziert  
 $\varphi$  in Homologie mit  $\mathbb{Z}$ -Koeffizienten einen Isomorphismus bis  
 zur Dimension  $k$ . Wegen der Isomorphismen

$$[P_k(M), K_j] \cong H^j(P_k(M); H_j(M; \mathbb{Z})) = \text{Hom}(H_j(P_k(M); \mathbb{Z}), H_j(M; \mathbb{Z}))$$

(Da  $M \setminus \mathring{D}^n$  ein Wedge von Sphären ist, ist  $H_{j-1}(P_k(M); \mathbb{Z})$   
 torsionsfrei.)

können wir für  $j = s, \dots, k$  Abbildungen  $\mu_j: P_k(M) \rightarrow K_j$   
 finden, so daß in der  $j$ -ten Homologie  
 $(\mu_j)_* = (\varphi)_*^{-1}: H_j(P_k(M); \mathbb{Z}) \rightarrow H_j(M; \mathbb{Z})$  ein Isomorphismus ist.  
 Dabei sei für  $j > n-s$   $K_j = K(0, j) = *$ .

Wir betrachten nun die Abbildung

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k): P_k(M) \rightarrow K_S \times \dots \times K_K.$$

$M \setminus \mathring{D}^n$  ist ein Wedge von Sphären. Das erste Whitehead-Produkt  
 von  $\pi_*(M \setminus \mathring{D}^n)$  taucht in Dimension  $2s-1$  auf. Wegen

$$\text{Wegen } k < 2s-1 < n \text{ ist deshalb für } p \leq k \quad \pi_p(M) \otimes \mathbb{Q} \cong H_p(M; \mathbb{Q})$$

wegen der Endlichkeit der in Frage kommenden Homotopiegruppen  
 der einzelnen Sphären. Daraus folgt, daß

$$\mu_* \otimes \text{Id}_{\mathbb{Q}}: \pi_p(P_k(M)) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \pi_p(K_S \times \dots \times K_K) \otimes \mathbb{Q} \quad \text{für } p \leq k \text{ ein}$$

Isomorphismus ist. Da für  $p > k$  die Homotopiegruppen auf beiden Seiten verschwinden, ist  $\mu$  eine rationale Homotopieäquivalenz. Also induziert  $\mu$  einen Isomorphismus in sämtlichen rationalen Homologiegruppen.

Es folgt nun für die Berechnung von  $\mathcal{H}_{n+i}^{B_k} \otimes \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{n+i}^{B_k} \otimes \mathbb{Q} &\cong \pi_{n+i}(P_k(M)^+ \wedge MO\langle k+2 \rangle) \otimes \mathbb{Q} \quad (\text{Thom-Pontrjagin-Konstruktion}) \\ &\cong H_{n+i}(P_k(M)^+ \wedge MO\langle k+2 \rangle) \otimes \mathbb{Q} \quad (\text{Serre}) \\ &\cong H_{n+i}(P_k(M) \times BO\langle k+2 \rangle; \mathbb{Q}) \quad (\text{Thom-Isomorphismus}) \\ &\cong H_{n+i}(K_S \times \dots \times K_k \times BO\langle k+2 \rangle; \mathbb{Q}) \quad (\text{von } \mu \text{ induziert}). \end{aligned}$$

q.e.d.

#### Satz 6.5:

Sei  $M^n$  eine  $(s-1)$ -zusammenhängende, fast-parallelisierbare Mannigfaltigkeit, so daß  $M \setminus \mathring{D}^n$  homotopieäquivalent zu einem Wedge von Sphären ist. Es gelte  $s \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  und  $n \geq 4$ .

Für  $q \in \mathbb{N}$  bezeichne  $K_q$  wieder  $K(H_q(M; \mathbb{Z}), q)$ .

Dann gibt es für  $n-2s+2 \leq i \leq 4s-n-2$  und  $k = \left\lfloor \frac{n+i-1}{2} \right\rfloor$

eine exakte Sequenz

$$\begin{aligned} (+) \quad H_i(M; \mathbb{Q}) &\xrightarrow{\bar{\alpha}_i} H_{n+i} \left( \bigvee_{q=s}^{n-s} K_q \times \hat{BO}_{n+i}\langle k+2 \rangle; \mathbb{Q} \right) \xrightarrow{\bar{\beta}_i} \pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M) \otimes \mathbb{Q} \\ &\xrightarrow{\bar{\gamma}_{i-1}} \pi_{i-1}(SO) \otimes \mathbb{Q} \oplus H_{i-1}(M; \mathbb{Q}) . \end{aligned}$$

Dabei ist  $\hat{BO}_{n+i}\langle k+2 \rangle$  der Totalraum der durch

$\tau_{n+i}: BO\langle k+2 \rangle \longrightarrow K(\mathbb{Z}, n+i)$  induzierten Faserung, falls  $n+i \equiv 0 \pmod{4}$ ,

wobei  $\tau_{n+i}$  durch die Signatur (L-Polynom) gegeben ist,

und  $\hat{BO}_{n+i}\langle k+2 \rangle = BO\langle k+2 \rangle$  sonst.

Ist  $n-2s+4 \leq i \leq 4s-n-2$  erfüllt, so liegt  $\pi_{i-1}(SO) \otimes \mathbb{Q} \oplus \{0\}$  im Bild von  $\bar{\gamma}_{i-1}$ . Ist zusätzlich die Homologie von  $M$  zwischen  $s$  und  $n-s$  (einschließlich) mindestens in 3 Dimensionen nichttrivial, so gibt es eine exakte Sequenz

$$\begin{aligned}
 (++) \quad 0 &\longrightarrow H_1(M; \mathbb{Q}) \longrightarrow H_{n+i} \left( \bigwedge_{q=s}^{n-s} K_q \times \widehat{BO}_{n+i} \langle k+2 \rangle; \mathbb{Q} \right) \\
 &\longrightarrow \widetilde{\pi}_{i-1} \widetilde{Diff}(M) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \widetilde{\pi}_{i-1}(SO) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow 0.
 \end{aligned}$$

### Beweis:

Wir zeigen zunächst, daß für  $n+i \equiv 0 \pmod{2}$  die Voraussetzungen von Satz 6.1 erfüllt sind.

Sei  $n+i \equiv 2 \pmod{4}$ . Wegen  $i > n-2s$  und  $i \leq 4s-n-2 < n$  gilt

$n-s < \frac{n+i}{2} < n$ , also  $H_{\frac{n+i}{2}}(M; \mathbb{Z}) = \{0\}$ . Für  $n+i = 6, 14$  ist

Satz 6.1 also anwendbar.

Sei nun  $n+i \equiv 2 \pmod{4}$ ,  $n+i \neq 6, 14$ . Es gilt  $k+2 = \frac{n+i}{2} + 1$ .

Außer für  $i=n-2$  ist  $H^{k+2}(M; \mathbb{Z}_2)$  null, also  $v_{k+2}(M) = 0$ . Wegen  $i \leq 4s-n-2$  ist  $i=n-2$  nur für  $n=2m$  und  $s=m$  möglich.

In diesem Fall gilt  $k+2 = n$ . Da  $M$  fast-parallelisierbar

ist, gilt  $w_j(M) = 0$  für  $j < n$ , also  $v_n(M) = w_n(M)$  nach der

Wu-Formel. Es folgt  $\langle v_n(M), [M] \rangle = \langle w_n(M), [M] \rangle = \chi(M) \pmod{2}$ .

Ist  $n \equiv 0 \pmod{4}$ , so gilt  $\chi(M) \equiv \text{sign}(M) \pmod{2}$ , und da die

Signatur einer fast-parallelisierbaren Mannigfaltigkeit

durch 2 teilbar ist, folgt  $\chi(M) \equiv 0 \pmod{2}$ , d.h.  $\langle v_n(M), [M] \rangle = 0$ .

Für  $n \equiv 2 \pmod{4}$  gilt  $\chi(M) \equiv \text{rg } H_m(M; \mathbb{Z}) \pmod{2}$ , und da die

Schnittform auf  $H_m(M; \mathbb{Z})$  unimodular und schiefsymmetrisch ist,

folgt  $\text{rg } H_m(M; \mathbb{Z}) \equiv 0 \pmod{2}$ . Also gilt auch in diesem Fall

$\langle v_n(M), [M] \rangle = 0$ . Wegen  $H^n(M; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$  folgt  $v_n(M) = 0$ .

Aus Hilfssatz 3.9 erhalten wir nun, daß für  $n+i \equiv 2 \pmod{4}$ ,

$n+i \neq 6, 14$ ,  $S(D^i \times M)$  minimal ist,

ebenso wie für  $n+i \equiv 0 \pmod{4}$ . Also ist Satz 6.1 anwendbar.

Ist  $n+i \equiv 1 \pmod{2}$ , so liefert die Surgery-Sequenz für relative

Normalen- $k$ -Smoothings einen Isomorphismus

$NS_k(D^i \times M; \bar{\nu}_1) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathfrak{S}_{n+i}^{B_k} \otimes \mathbb{Q}$ , da  $\partial: L_{i+1,n}^{(k)}(M) \longrightarrow NS_k(D^i \times M; \bar{\nu}_1)$

endliches Bild hat (Satz 6.2).

Durch Anwendung der Sätze 6.1 und 6.2 erhalten wir nach tensorieren mit  $\mathbb{Q}$  eine exakte Sequenz

$$(*) \quad \pi_1(F_k) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{n+1}^{B_k} \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \pi_{i-1}(\widetilde{\text{Diff}}(M)) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \pi_{i-1}(F_k) \otimes \mathbb{Q}.$$

Für  $i \geq n-2s+2$  ist  $k \geq n-s$ , d.h.  $\widehat{\mathcal{D}}_{n+1}^{B_k} \otimes \mathbb{Q}$  und  $H_{n+1}(\bigwedge_{q=s}^{n-s} K_q \times BO\langle k+2 \rangle; \mathbb{Q})$  sind nach Hilfssatz 6.3 isomorph, falls  $k < 2s-1$ . Diese Bedingung ist wegen  $i \leq 4s-n-2$  erfüllt.

Da für  $n+i \equiv 0 \pmod{4}$  die Surgery-Invariante  $\widehat{\mathcal{D}}_{n+1}^{B_k} \xrightarrow{\Theta} L_{n+1}(e) \cong \mathbb{Z}$  durch die Signatur gegeben ist, folgt daraus unmittelbar

$$\widehat{\mathcal{D}}_{n+1}^{B_k} \otimes \mathbb{Q} \cong H_{n+1}(\bigwedge_{q=s}^{n-s} K_q \times \widehat{BO}_{n+i}\langle k+2 \rangle; \mathbb{Q}).$$

Zur Berechnung von  $\pi_j(F_k)$  ( $j=i, i-1$ ) wird die Faserhomotopie-sequenz von  $F_k \rightarrow B_k \xrightarrow{P} BO$  verwendet. Wir erhalten damit eine exakte Sequenz  $\pi_{j+1}(P_k(M) \times BO\langle k+2 \rangle) \rightarrow \pi_{j+1}(BO) \rightarrow \pi_j(F_k) \rightarrow \pi_j(P_k(M) \times BO\langle k+2 \rangle) \rightarrow \pi_j(BO)$ . Aus  $s \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  und  $i \leq 4s-n-2$  folgt  $i \leq n-1$  und daraus  $j \leq k = \left\lfloor \frac{n+i-1}{2} \right\rfloor$ , also  $\pi_{j+1}(BO\langle k+2 \rangle) = \{0\}$  für  $j=i$  und  $j=i-1$ .

Da die Faserung  $P_k(M) \times BO\langle k+2 \rangle \rightarrow BO$  auf dem ersten Faktor trivial ist, ergibt sich nun die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \pi_{j+1}(BO) \longrightarrow \pi_j(F_k) \longrightarrow \pi_j(P_k(M)) \longrightarrow 0.$$

Es gibt für  $j=i$  und  $j=i-1$  Isomorphismen

$$\pi_j(P_k(M)) \otimes \mathbb{Q} \cong \pi_j(\bigwedge_{q=s}^{n-s} K_q) \otimes \mathbb{Q} \cong H_j(M; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \cong H_j(M; \mathbb{Q})$$

Also erhalten wir für  $\pi_j(F_k)$  eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \pi_{j+1}(BO) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \pi_j(F_k) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow H_j(M; \mathbb{Q}) \longrightarrow 0.$$

Nach Wahl einer Spaltung führt diese Sequenz zusammen mit der Sequenz (\*) zu folgender exakter Sequenz:

$$(**) \quad \pi_1(SO) \otimes \mathbb{Q} \oplus H_1(M; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\bar{\alpha}_i} H_{n+1}(\bigwedge_{q=s}^{n-s} K_q \times \widehat{BO}_{n+i}\langle k+2 \rangle; \mathbb{Q}) \\ \xrightarrow{\bar{\beta}_i} \pi_{i-1}(\widetilde{\text{Diff}}(M)) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\bar{\gamma}_{i-1}} \pi_{i-1}(SO) \otimes \mathbb{Q} \oplus H_{i-1}(M; \mathbb{Q}).$$

Aus Teil (iii) von Satz 6.1, bzw. 6.2 folgt, daß es für  $i \geq n-2s+4$  einen Homomorphismus

$\bar{\alpha}_{i-1}: \pi_{i-1}(F_k) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \hat{\mathcal{Q}}_{n+i}^{B_k} \otimes \mathbb{Q}$  gibt, so daß die Sequenz  
 $\pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\bar{\alpha}_i} \pi_{i-1}(F_k) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\bar{\alpha}_{i-1}} \hat{\mathcal{Q}}_{n+i}^{B_k} \otimes \mathbb{Q}$

an der Stelle  $\pi_{i-1}(F_k) \otimes \mathbb{Q}$  exakt ist.

Wir wollen nun die Abbildungen  $\bar{\alpha}_j$  für  $j=i$  und  $j=i-1$  genauer untersuchen.

Es soll gezeigt werden, daß

- a)  $\bar{\alpha}_j|_{\pi_j(SO) \otimes \mathbb{Q} \oplus \{0\}}$  die Nullabbildung ist und daß
- b)  $\bar{\alpha}_j|_{\{0\} \oplus H_j(M; \mathbb{Q})}$  injektiv ist, falls die zusätzlichen Bedingungen an die Homologie von  $M$  erfüllt sind.

Aus a) für  $j=i$  folgt aus (\*\*) die exakte Sequenz (+) des Satzes und aus a) und b) die Sequenz (++).

Ist  $h \in \text{Aut}((B_k, p) \text{rel } \bar{\nu}_j)$  gegeben, so wird  $\gamma_{\alpha_j}(h) \in \hat{\mathcal{Q}}_{n+i}^{B_k}$  durch die  $B_k$ -Mannigfaltigkeit

$$h \circ \bar{\nu}_j \cup -\bar{\nu}_j: S^j \times M \longrightarrow B_k \text{ repräsentiert.}$$

Diese Bordismusklassse ist rational von den  $B_k$ -Bordismuszahlen bestimmt. Die  $B_k$ -Bordismuszahlen hängen nur von der Homotopieklasse von  $h \circ \bar{\nu}_j \cup -\bar{\nu}_j$  als Abbildung nach  $B_k$  ab.

Aus dem kommutativen Diagramm mit exakten Reihen

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow [D_+^{j+1}, BO]_{\bar{\nu}_{j+1}} & \xrightarrow{\quad} & \text{Aut}((B_k, p) \text{rel } \bar{\nu}_j) & \longrightarrow & [D_+^j, B_k]_{\bar{\nu}_j} & \xrightarrow{\quad} & [D_+^j, BO]_{\bar{\nu}_j} \\ \downarrow \cong & & \downarrow \phi_k^j & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \pi_{j+1}(BO) \cong \pi_j(SO) & \xrightarrow{\partial} & \pi_j(F_k) & \longrightarrow & \pi_j(B_k) & \longrightarrow & \pi_j(BO) \end{array}$$

(Vgl. Seite 67,  $X = M^{(k-j+1)} = *$ ) folgt, daß für  $\xi \in \pi_j(SO)$  mit  $h = (\phi_k^j)^{-1} \partial(\xi)$   $h \circ \bar{\nu}_j|_{D_+^j} \simeq \bar{\nu}_j|_{D_+^j}$  relativ  $S^{j-1}$  gilt, und da  $B_k \rightarrow BO$   $k$ -Postnikov-Faserung ist und  $M^{(k-j+1)} = *$ , läßt sich die Homotopie zu einer Homotopie relativ  $S^j \times M$  zwischen  $h \circ \bar{\nu}_j$  und  $\bar{\nu}_j$  fortsetzen. Also folgt, daß  $\bar{\alpha}_j(\partial(\xi)) = \gamma_{\alpha_j}(h)$   
 $= (h \circ \bar{\nu}_j \cup -\bar{\nu}_j: S^j \times M \rightarrow B_k)$  homotop zu  $\bar{\nu}_j \cup -\bar{\nu}_j = \bar{\nu}_{j+1} = \bar{\nu}_{j+1}|_{S^j \times M}$  ist. Da  $(S^j \times M, \bar{\nu}_{j+1}|_{S^j \times M}) = \partial(D_+^{j+1} \times M, \bar{\nu}_{j+1})$  nullbordant ist, verschwinden alle  $B_k$ -Bordismuszahlen von  $\bar{\alpha}_j(\partial(\xi))$ , d.h.

$\bar{\alpha}_j|_{\pi_j(SO) \otimes \mathbb{Q} \oplus \{0\}}$  ist identisch null.

Es bleibt zu zeigen, daß  $\bar{\alpha}_j|_{H_j(M; \mathbb{Q})}$  injektiv ist, falls die zusätzlichen Bedingungen für die Homologie von M erfüllt sind.

Seien  $a_1, \dots, a_r$  Elemente in  $\pi_j(M)$ , die eine Basis von  $\pi_j(M) \otimes \mathbb{Q} \cong H_j(M; \mathbb{Q})$  repräsentieren und  $(x_1, \dots, x_r)$  die duale Basis in  $H^j(M; \mathbb{Q})$ .

Das fest gewählte k-Smoothing  $\bar{\gamma}_M = (\gamma, \tilde{\gamma}_M): M \longrightarrow P_k(M) \times BO\langle k+2 \rangle$  definiert durch Komposition mit  $(\gamma \times \text{Id}_{BO\langle k+2 \rangle})$  eine Abbildung

$$M \longrightarrow \bigvee_{q=s}^{n-s} K_q \times BO\langle k+2 \rangle, \text{ die wir kurz mit } \hat{\gamma} \text{ bezeichnen wollen.}$$

Es gibt eindeutig bestimmte Kohomologieklassen  $\zeta_t \in H^j(K_j; \mathbb{Q})$  mit  $\hat{\gamma}^*(\zeta_t) = x_t$ ,  $t=1, \dots, r$ .

Die Bordismusklassse  $\bar{\alpha}_j(a_t)$  in  $\Omega_{n+j}^{B_k} \otimes \mathbb{Q}$  ist durch eine  $B_k$ -Struktur

$\lambda(a_t): S^j \times M \longrightarrow B_k$  gegeben, die folgende Eigenschaften hat:

$$a) \lambda(a_t)_* [S^j \times \{x_0\}] = (\bar{\gamma}_M)_*(a_t)$$

$$b) \lambda(a_t)_*|_{H_q(M; \mathbb{Q})} = (\bar{\gamma}_M)_*$$

(Vgl. Beweis von Hilfssatz 5.8).

Dann gilt für  $\bar{\lambda}(a_t) = (\gamma \times \text{Id}_{BO\langle k+2 \rangle})_* \lambda(a_t)$

$\bar{\lambda}(a_t)^*(\zeta_q) = x'_j + \delta_{qt} \zeta'$  in Dimension j und

$\bar{\lambda}(a_t)^* = P_M^* \hat{\gamma}^*$  in Dimension q für  $q \neq j$ ,  $q \leq k$ ,

wobei  $x'_q = P_M^*(x_q)$  und  $\zeta' = P_{S^j}^*(\zeta)$

$(P_M: S^j \times M \rightarrow M, P_{S^j}: S^j \times M \rightarrow S^j)$  Projektionen,  $\zeta \in H^j(S^j)$  Erzeuger).

Wir zeigen nun, daß sich unter den zusätzlichen Bedingungen

an die Homologie von M eine nichttriviale Kohomologieklassse

$\bar{\tau} \in H^n(K_S \times \dots \times K_{n-s}; \mathbb{Q})$  finden läßt, so daß  $\bar{\lambda}(a_t)^*(\bar{\tau}) = P_M^* \hat{\gamma}^*(\bar{\tau}) \neq 0$  gilt.

Angenommen, die Homologie von M ist in mindestens 3 Dimensionen

zwischen s und n-s einschließlich nichttrivial, Dann gibt es

ein  $p \in \mathbb{N}$  mit  $s \leq p \leq n-s$ ,  $p \neq j$ ,  $n-p \neq j$  und  $H_p(M; \mathbb{Z}) \neq 0$ .

Dabei ist auch der Fall  $p = n-p = \frac{n}{2}$  zugelassen.

Sei  $y_0 \in H^p(M; \mathbb{Q})$  ein nichttriviales Element. Wegen Poincaré-Dualität gibt es ein  $y'_0$  mit  $y_0 \cup y'_0 \neq 0$ . Weil  $n-s \leq k$  gilt, ist

$\mathcal{D}^*: H^q(\bigwedge_{q=s}^{n-s} K_q \times BO\langle k+2 \rangle; \mathbb{Q}) \longrightarrow H^q(M; \mathbb{Q})$  für  $q = p$  und  $q = n-p$  ein Isomorphismus. Also gibt es eindeutig bestimmte Elemente  $\zeta_0 \in H^p(\bigwedge_{q=s}^{n-s} K_q \times BO\langle k+2 \rangle; \mathbb{Q})$  und  $\zeta'_0 \in H^{n-p}(\bigwedge_{q=s}^{n-s} K_q \times BO\langle k+2 \rangle; \mathbb{Q})$  mit  $\mathcal{D}^*(\zeta_0) = y_0$  und  $\mathcal{D}^*(\zeta'_0) = y'_0$ .

Für die Kohomologieklassen  $\bar{\zeta} = \zeta_0 \cup \zeta'_0$  erhalten wir

$$\bar{\lambda}(a_t)^*(\bar{\zeta}) = \bar{\lambda}(a_t)^*(\zeta_0) \cup \bar{\lambda}(a_t)^*(\zeta'_0) = p_M^* \mathcal{D}^*(\zeta_0) \cup p_M^* \mathcal{D}^*(\zeta'_0) = p_M^* \mathcal{D}^*(\bar{\zeta}),$$

und wegen  $p_M^* \mathcal{D}^*(\zeta_0) \cup p_M^* \mathcal{D}^*(\zeta'_0) = p_M^*(y_0 \cup y'_0)$  gilt nach Wahl von  $y_0$  und  $y'_0$   $p_M^* \mathcal{D}^*(\bar{\zeta}) \neq 0$ .

Wir betrachten nun die Kohomologieklassen

$$(\zeta \cup \bar{\zeta}, q = 1, \dots, r \text{ in } H^{n+j}(\bigwedge_{q=s}^{n-s} K_q \times BO\langle k+2 \rangle; \mathbb{Q})).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \langle \zeta \cup \bar{\zeta}; \bar{\lambda}(a_t)_* [S^j_{xM}] \rangle &= \langle \bar{\lambda}(a_t)^*(\zeta \cup \bar{\zeta}), [S^j_{xM}] \rangle \\ &= \langle (x'_q + \delta_{qt} \delta^1) \cup p_M^* \mathcal{D}^*(\bar{\zeta}); [S^j_{xM}] \rangle \\ &= \langle p_M^*(x_q \cup \mathcal{D}^*(\bar{\zeta})) + \delta_{qt} \delta^1 \cup p_M^* \mathcal{D}^*(\bar{\zeta}); [S^j_{xM}] \rangle \\ &= \delta_{qt} \langle \delta^1 \cup \mathcal{D}^*(\bar{\zeta}); [S^j_{xM}] \rangle = \delta_{qt} \langle \mathcal{D}^*(\bar{\zeta}); [M] \rangle, \end{aligned}$$

da  $x_q \cup \mathcal{D}^*(\bar{\zeta}) = 0$  wegen  $H^{n+j}(M; \mathbb{Q}) = \{0\}$ .

Da  $\mathcal{D}^*(\bar{\zeta}) \neq 0$ , erhalten wir also, daß die Elemente

$\bar{\alpha}_j(a_t)$ ,  $t=1, \dots, r$ , linear unabhängig sind.

Also ist  $\bar{\alpha}_j|_{\{0\} \times H_j(M; \mathbb{Q})}$  injektiv.

q.e.d.

Ist die Homologie von  $M$  (außer in den Dimensionen 0 und  $n$ ) nur in den Dimensionen  $s$  und  $n-s$  nichttrivial, so lassen sich mit den Methoden, die beim Beweis von Satz 6.5 verwendet wurden, Aussagen über Bild und Kern von  $\bar{\alpha}_i$  und  $\bar{\alpha}_{i-1}$  herleiten. Hier soll zum Abschluß dieses Kapitels nur noch das Ergebnis für  $(n-1)$ -zusammenhängende  $2n$ -Mannigfaltigkeiten dargestellt werden.

Satz 6.6:

Sei  $M$  eine  $(n-1)$ -zusammenhängende fast-parallelisierbare  $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $K_n = K(\pi_n(M), n)$ . Es gelte  $2 \leq i \leq 2n-2$  und  $k = \left\lfloor \frac{2n+i-1}{2} \right\rfloor$ .

1. Fall:  $n$  gerade

Für  $i$  ungerade ist  $\pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M) \otimes \mathbb{Q} = \{0\}$ .

Für  $i$  gerade,  $i \neq n$ , gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H_{2n+i}(K_n \times \hat{B}O_{2n+i}, \langle k+2 \rangle; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\bar{\beta}_i} \pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\bar{\alpha}_{i-1}} \pi_{i-1}(SO) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

und für  $i = n$  eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H_n(M; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\bar{\alpha}_n} H_{3n}(K_n \times \hat{B}O_{3n}, \langle \frac{3n+2}{2} \rangle; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\bar{\beta}_n} \pi_{n-1} \widetilde{\text{Diff}}(M) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\bar{\alpha}_{n-1}} \pi_{n-1}(SO) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow 0.$$

2. Fall:  $n$  ungerade

Für  $i \neq n$ ,  $n+1$  gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H_{2n+i}(K_n \times \hat{B}O_{2n+i}, \langle k+2 \rangle; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\bar{\beta}_i} \pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\bar{\alpha}_{i-1}} \pi_{i-1}(SO) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow 0.$$

Ist  $r = \text{rg } \pi_n(M) \geq 4$ , so gilt

$$\text{für } n \equiv 3 \pmod{4} \quad \pi_n \widetilde{\text{Diff}}(M) \otimes \mathbb{Q} = \pi_n(SO) \otimes \mathbb{Q}$$

$$\text{und für } n \equiv 1 \pmod{4} \quad H_{3n+1}(\hat{B}O_{3n+1}, \langle \frac{3n+3}{2} \rangle; \mathbb{Q}) \cong \pi_n \widetilde{\text{Diff}}(M) \otimes \mathbb{Q}.$$

Für  $\pi_{n-1} \widetilde{\text{Diff}}(M) \otimes \mathbb{Q}$  gibt es in beiden Fällen eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H_n(M; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\bar{\alpha}_n} H_{3n}(K_n; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\bar{\beta}_n} \widetilde{\pi}_{n-1} \text{Diff}(M) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow 0.$$

Ist  $r = \text{rg } \widetilde{\pi}_n(M) = 2$ ,

so gilt für  $n \equiv 3 \pmod{4}$   $\widetilde{\pi}_n \text{Diff}(M) \otimes \mathbb{Q} \cong \widetilde{\pi}_n(SO) \otimes \mathbb{Q} \oplus H_n(M; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^3$

und für  $n \equiv 1 \pmod{4}$  gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H_{3n+1}(\widehat{BO}_{3n+1} \langle \frac{3n+3}{2} \rangle; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\bar{\beta}_{n+1}} \widetilde{\pi}_n \text{Diff}(M) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\bar{\gamma}_n} H_n(M; \mathbb{Q}) \longrightarrow 0.$$

Ferner gilt  $\widetilde{\pi}_{n-1} \text{Diff}(M) \otimes \mathbb{Q} = \{0\}$ .

### Beweis:

Aus Satz 6.5 erhält man zunächst für  $2 \leq i \leq 2n-2$

eine exakte Sequenz

$$(*) \quad H_i(M; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\bar{\alpha}_i} H_{2n+i}(K_n \times \widehat{BO}_{2n+i} \langle k+2 \rangle; \mathbb{Q}) \longrightarrow \widetilde{\pi}_{i-1} \text{Diff}(M) \otimes \mathbb{Q} \\ \xrightarrow{\bar{\gamma}_{i-1}} \widetilde{\pi}_{i-1}(SO) \otimes \mathbb{Q} \oplus H_{i-1}(M; \mathbb{Q}),$$

wobei  $\widetilde{\pi}_{i-1}(SO) \otimes \mathbb{Q} \oplus \{0\}$  im Bild von  $\bar{\gamma}_{i-1}$  liegt.

Für  $i \neq n$ ,  $n+1$  erhält man daraus die Sequenz

$$(**) \quad 0 \longrightarrow H_{2n+i}(K_n \times \widehat{BO}_{2n+i} \langle k+2 \rangle; \mathbb{Q}) \longrightarrow \widetilde{\pi}_{i-1} \text{Diff}(M) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \widetilde{\pi}_{i-1}(SO) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow 0.$$

### 1. Fall: n gerade

Die rationale Homologie von  $\widehat{BO}_{2n+i} \langle k+2 \rangle$  ist bis zur Dimension  $2n+i$  nur in durch 4 teilbaren Dimensionen und die rationale Homologie von  $K_n$  wegen  $n$  gerade nur in geraden Dimensionen konzentriert. Für  $i$  ungerade ist deshalb

$H_{2n+i}(K_n \times \widehat{BO}_{2n+i} \langle k+2 \rangle; \mathbb{Q}) = \{0\}$ . Ferner gilt für ungerades  $i$

$\widetilde{\pi}_{i-1}(SO) \otimes \mathbb{Q} = \{0\}$ . Also erhalten wir aus der Sequenz (\*\*)

für  $i$  ungerade,  $i \neq n+1$   $\widetilde{\pi}_{i-1} \text{Diff}(M) \otimes \mathbb{Q} = \{0\}$ .

Die angegebene Sequenz für  $i$  gerade,  $i \neq n$ , ist bereits die Sequenz (\*\*).

Genauso wie für 4-dimensionale Mannigfaltigkeiten in

Hilfssatz 5.8 sieht man, daß für  $n$  gerade

$\bar{\alpha}_n: H_n(M; \mathbb{Q}) \longrightarrow \widehat{\Omega}_{3n}^{B\mathbb{K}} \otimes \mathbb{Q} \cong H_{3n}(K_n \times \widehat{BO}_{3n} \langle k+2 \rangle; \mathbb{Q})$  injektiv ist,

wobei  $k = \frac{3n-2}{2}$ . Damit folgt aus (\*) für  $\widetilde{\pi}_{n-1} \text{Diff}(M) \otimes \mathbb{Q}$  die

$$\text{exakte Sequenz} \quad 0 \longrightarrow H_n(M; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\bar{\alpha}_n} H_{3n}(K_n \times \hat{B}O_{3n} \langle \frac{3n+2}{2} \rangle; \mathbb{Q}) \\ \xrightarrow{\bar{\beta}_n} \widetilde{\pi}_{n-1} \widetilde{\text{Diff}}(M) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\bar{\gamma}_n} \widetilde{\pi}_{n-1}(SO) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow 0.$$

Zur Berechnung von  $\widetilde{\pi}_n \widetilde{\text{Diff}}(M) \otimes \mathbb{Q}$  erhalten wir aus (\*) die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H_{3n+1}(K_n \times \hat{B}O \langle k+2 \rangle; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\bar{\beta}_{n+1}} \widetilde{\pi}_n \widetilde{\text{Diff}}(M) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\bar{\gamma}_n} H_n(M; \mathbb{Q}),$$

wobei jetzt  $k = \frac{3n}{2}$ . Wegen  $i = n+1 > 3$  gibt es nach Satz 6.2 einen Homomorphismus  $\bar{\alpha}_n: H_n(M; \mathbb{Q}) \longrightarrow \hat{\Sigma}_{3n}^{B_k} \otimes \mathbb{Q} = H_{3n}(K_n \times \hat{B}O_{3n} \langle k+2 \rangle; \mathbb{Q})$  mit Bild  $\bar{\gamma}_n = \text{Kern } \bar{\alpha}_n$ . Genauso wie für  $k = \frac{3n}{2} - 1$  ist  $\bar{\alpha}_n$  auch für  $k = \frac{3n}{2}$  injektiv, und mit  $H_{3n+1}(K_n \times \hat{B}O_{3n+1} \langle k+2 \rangle; \mathbb{Q}) = \{0\}$  folgt  $\widetilde{\pi}_n \widetilde{\text{Diff}}(M) \otimes \mathbb{Q} = \{0\}$ .

Damit ist der Beweis für  $n$  gerade abgeschlossen.

## 2. Fall: $n$ ungerade

Die exakte Sequenz für  $i \neq n$ ,  $n+1$  ist bereits mit (\*\*) gezeigt worden.

Für  $\widetilde{\pi}_{n-1} \widetilde{\text{Diff}}(M) \otimes \mathbb{Q}$  erhalten wir eine exakte Sequenz

$$(\#) \quad H_n(M; \mathbb{Q}) \longrightarrow H_{3n}(K_n \times \hat{B}O_{3n} \langle k+2 \rangle; \mathbb{Q}) \longrightarrow \widetilde{\pi}_{n-1} \widetilde{\text{Diff}}(M) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow 0,$$

da  $\widetilde{\pi}_{n-1}(SO) \otimes \mathbb{Q} = \{0\}$ . ( $k = \frac{3n-1}{2}$ )

Wegen  $3n \equiv 1 \pmod{2}$  und  $2n \equiv 2 \pmod{4}$  folgt aus der Künneth-Formel  $H_{3n}(K_n \times \hat{B}O_{3n} \langle k+2 \rangle; \mathbb{Q}) \cong H_{3n}(K_n; \mathbb{Q})$ , da die rationale Homologie von  $BO \langle k+2 \rangle$  nur in durch 4 teilbaren Dimensionen nichttrivial ist. Damit erhalten wir aus (#) die Sequenz

$$(\#\#) \quad H_n(M; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\bar{\alpha}_n} H_{3n}(K_n; \mathbb{Q}) \longrightarrow \widetilde{\pi}_{n-1} \widetilde{\text{Diff}}(M) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow 0.$$

Wir zeigen nun, daß für  $r = \text{rg } \widetilde{\pi}_n(M) \geq 4$   $\bar{\alpha}_n$  injektiv ist.

Sei  $\bar{\gamma}_M = (\mathcal{V}, \widetilde{\gamma}_M): M \longrightarrow K_n \times \hat{B}O \langle k+2 \rangle$  das fest gewählte Normalen- $k$ -Smoothing auf  $M$ . O.B.d.A. können wir  $\gamma_* = \text{Id}$  auf  $\widetilde{\pi}_n(M)$  annehmen. Ist  $x \in \widetilde{\pi}_n(M) \cong H_n(M; \mathbb{Z})$ , so ist  $\bar{\alpha}_i(x) \in \hat{\Sigma}_{3n}^{B_k}$  durch eine  $B_k$ -Mannigfaltigkeit

$$\lambda(x): S^n \times M \longrightarrow K_n \times \hat{B}O \langle k+2 \rangle \quad \text{mit}$$

$$\lambda(x) \Big|_{t_0 \times M} = \bar{\gamma}_M$$

und  $\lambda(x)_*(\overline{[S^n]} \times \{x\}) = (\overline{\varphi_M})_*(x)$

definiert (Vgl. Hilfssatz 5.8 und Satz 6.5).

Sei  $(e_1, \dots, e_r)$  eine Basis von  $H^n(M; \mathbb{Z})$ , so daß es zu

$i \in \{1, \dots, r\}$  ein eindeutig bestimmtes  $k(i) \in \{1, \dots, r\}$  gibt

mit  $\langle e_i \cup e_{k(i)}, [M] \rangle = \pm 1$  und  $\langle e_i \cup e_j, [M] \rangle = 0$  für  $j \neq i$ .

Da die Cupproduktform aus  $H^n(M; \mathbb{Z})$  unimodular und schiefsymmetrisch ist, ist das immer möglich (Existenz einer symplektischen Basis).

Sei  $\ell_i = (\varphi^*)^{-1}(e_i) \in H^n(K_n; \mathbb{Z})$  und  $(a_1, \dots, a_r)$  die (Kronecker-) duale Basis von  $(e_1, \dots, e_r)$ .

Sei ferner  $\lambda_i: S^n \times M \rightarrow K_n$  die durch  $\overline{\varphi_n}(a_i)$  gegebene Abbildung.

Dann gilt  $\lambda_i|_M = \varphi$  und  $\lambda_{i*}(\overline{[S^n]} \times \{a_i\}) = \varphi_*(a_i)$ .

Da  $r \geq 4$ , können wir zu jedem  $i$  einen Index  $j_i \neq i$  wählen, so daß

$e_i \cup e_{j_i} = 0$ . Wir betrachten nun die Kohomologieklassen

$$(\ell_i \cup (\ell_{j_i} \cup (\ell_{k(j_i)}))_{i=1}^r.$$

Es gilt  $j_i \neq i$  und  $k(j_i) \neq i$ , also

$$\begin{aligned} \langle \lambda_i^*(\ell_i \cup (\ell_{j_i} \cup (\ell_{k(j_i)})), [S^n \times M] \rangle &= \langle (e_i + \delta) \cup e_{j_i} \cup e_{k(j_i)}, [S^n \times M] \rangle \\ &= \langle \delta \cup e_{j_i} \cup e_{k(j_i)}, [S^n \times M] \rangle = \pm 1. \end{aligned}$$

(Dabei bezeichnen wir  $p_M^*(e_i) \in H^n(S^n \times M; \mathbb{Z})$  kurz wieder mit  $e_i$  und  $p_{S^n}^*(\delta)$  mit  $\delta \in H^n(S^n; \mathbb{Z})$  kurz wieder mit  $\delta$ .)

Ferner gilt für  $j \neq i$   $\lambda_j^*(\ell_i \cup (\ell_{j_i} \cup (\ell_{k(j_i)})) = 0$ .

Ist  $j \neq i$ , so gilt nämlich entweder  $j = j_i$ ,  $j = k(j_i)$  oder  $j \in \{1, \dots, r\} \setminus \{j_i, i, k(j_i)\}$ . Im ersten Fall gilt

$\lambda_j^*(\ell_i \cup (\ell_{j_i} \cup (\ell_{k(j_i)})) = e_i \cup (e_{j_i} + \delta) \cup e_{k(j_i)}$ , und wegen  $e_i \cup e_{k(j_i)} = 0$  nach Wahl der Basis  $(e_1, \dots, e_r)$  folgt  $\lambda_j^*(\ell_i \cup (\ell_{j_i} \cup (\ell_{k(j_i)})) = 0$ .

Analog folgt dieses Ergebnis für  $j = k(j_i)$ , und im dritten

Fall folgt automatisch  $\lambda_j^*(\ell_i \cup (\ell_{j_i} \cup (\ell_{k(j_i)})) = e_i \cup e_{j_i} \cup e_{k(j_i)} = 0$ .

Also definieren die Kohomologieklassen  $(\ell_i \cup (\ell_{j_i} \cup (\ell_{k(j_i)}))_{i=1}^r$

einen Homomorphismus  $\omega: H_{3n}(K_n; \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}^r$ , so daß

$\omega \circ \overline{\alpha}_n: H_n(M; \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}^r$  injektiv ist. Daraus folgt die

Injektivität von  $\overline{\alpha}_n$ .

Damit ist für  $\widetilde{\pi}_{n-1} \text{Diff}(M) \otimes \mathbb{Q}$  die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H_n(M; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\overline{\alpha}_n} H_{3n}(K_n; \mathbb{Q}) \rightarrow \widetilde{\pi}_{n-1} \text{Diff}(M) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow 0 \quad \text{bewiesen, falls } r \geq 4.$$

Für  $\widetilde{\pi}_n \text{Diff}(M) \otimes \mathbb{Q}$  erhalten wir aus (\*) zusammen mit Satz 6.1 eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H_{3n+1}(K_n \times \widehat{B\mathbb{O}}_{3n+1} \langle k+2 \rangle; \mathbb{Q}) \rightarrow \widetilde{\pi}_n \text{Diff}(M) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \widetilde{\pi}_n(SO) \otimes \mathbb{Q} \oplus H_{3n}(K_n; \mathbb{Q}).$$

Für  $r \geq 4$  erhalten wir also wegen der Injektivität von  $\overline{\alpha}_n$

$$0 \rightarrow H_{3n+1}(K_n \times \widehat{B\mathbb{O}}_{3n+1} \langle k+2 \rangle; \mathbb{Q}) \rightarrow \widetilde{\pi}_n \text{Diff}(M) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \widetilde{\pi}_n(SO) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow 0.$$

Man erhält wegen  $n \equiv 1 \pmod{2}$  leicht  $H_{3n+1}(K_n \times \widehat{B\mathbb{O}}_{3n+1} \langle k+2 \rangle; \mathbb{Q})$

$$= H_{3n+1}(\widehat{B\mathbb{O}}_{3n+1} \langle k+2 \rangle; \mathbb{Q}) \quad \text{und damit für } \widetilde{\pi}_n \text{Diff}(M) \otimes \mathbb{Q} \text{ die Sequenz} \\ (\#\#) \quad 0 \rightarrow H_{3n+1}(\widehat{B\mathbb{O}}_{3n+1} \langle k+2 \rangle; \mathbb{Q}) \rightarrow \widetilde{\pi}_n \text{Diff}(M) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \widetilde{\pi}_n(SO) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow 0.$$

Für  $n \equiv 3 \pmod{4}$  ist  $3n+1 \equiv 2 \pmod{4}$ , also  $H_{3n+1}(\widehat{B\mathbb{O}}_{3n+1} \langle k+2 \rangle; \mathbb{Q}) = \{0\}$ ,

d.h.  $\widetilde{\pi}_n \text{Diff}(M) \otimes \mathbb{Q} \cong \widetilde{\pi}_n(SO) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$ .

Für  $n \equiv 1 \pmod{4}$  ist  $3n+1 \equiv 0 \pmod{4}$ . Dann gilt  $\widetilde{\pi}_n(SO) \otimes \mathbb{Q} = \{0\}$ , also

folgt  $H_{3n+1}(\widehat{B\mathbb{O}}_{3n+1} \langle k+2 \rangle; \mathbb{Q}) \cong \widetilde{\pi}_n \text{Diff}(M) \otimes \mathbb{Q}$  mit  $k = \frac{3n-1}{2}$ .

Für  $r = \text{rg } \widetilde{\pi}_n(M) = 2$  gilt  $H_{3n}(K_n; \mathbb{Q}) \cong H_{3n}(K(\mathbb{Z}, n) \times K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) = \{0\}$ , da  $K(\mathbb{Z}, n)$  eine rationale Homologiesphäre ist.

Aus der Sequenz  $0 \rightarrow H_{3n+1}(\widehat{B\mathbb{O}}_{3n+1} \langle k+2 \rangle; \mathbb{Q}) \rightarrow \widetilde{\pi}_n \text{Diff}(M) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \widetilde{\pi}_{n-1}(SO) \otimes \mathbb{Q} \oplus H_n(M; \mathbb{Q}) \rightarrow H_{3n}(K_n; \mathbb{Q}) \rightarrow \widetilde{\pi}_{n-1} \text{Diff}(M) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow 0$  ergibt sich also in diesem Fall  $\widetilde{\pi}_{n-1} \text{Diff}(M) \otimes \mathbb{Q} = \{0\}$ ,

und aus der sich damit ergebenden Sequenz

$$0 \rightarrow H_{3n+1}(\widehat{B\mathbb{O}}_{3n+1} \langle k+2 \rangle; \mathbb{Q}) \rightarrow \widetilde{\pi}_n \text{Diff}(M) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \widetilde{\pi}_n(SO) \otimes \mathbb{Q} \oplus H_n(M; \mathbb{Q}) \rightarrow 0 \quad \text{folgt ohne weiteres die Behauptung für } \widetilde{\pi}_n \text{Diff}(M) \otimes \mathbb{Q}.$$

q.e.d.

§ 7 Berechnung von  $\widetilde{\pi}_0 \text{Diff}(M)$  und  $\widetilde{\pi}_1 \text{Diff}(M)$   
für hochzusammenhängende fast-parallelisierbare  
Mannigfaltigkeiten

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Berechnung von  $\pi_0 \text{Diff}(M)$  und  $\pi_1 \text{Diff}(M)$  für  $(n-1)$ -zusammenhängende fast-parallelisierbare  $2n$ -Mannigfaltigkeiten und mit  $\pi_0 \text{Diff}(M)$  für  $(n-1)$ -zusammenhängende fast-parallelisierbare  $2n+1$ -Mannigfaltigkeiten.

$\pi_0 \text{Diff}(M^{2n})$  ist in  $[Kr_3]$  in Form von exakten Sequenzen berechnet worden. Dieses Ergebnis wird in einer etwas anderen Form erneut hergeleitet. Weiterhin wird für  $n \equiv 0, 2, 3, 4 \pmod{8}$   $\pi_1 \text{Diff}(M^{2n})$  bestimmt. Diese Berechnungen führen auch zur Bestimmung von  $\pi_0 \text{Diff}(M)$  für  $(2n+1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten, falls  $H_n(M; \mathbb{Z})$  torsionsfrei ist. Dieser Fall ist in  $[Ei]$  im Fall von stabil-parallelisierbaren Mannigfaltigkeiten behandelt worden. Die dort verwendete Methode führt für den Fall, daß  $H_n(M; \mathbb{Z})$  Torsion enthält, zu großen Schwierigkeiten. Mit dem in dieser Arbeit durchgeführten Ansatz lassen sich auch in dieser Situation Ergebnisse erzielen.

A) Zur Bestimmung von  $\Omega_{2n+1}^{B_n(M)}$  und  $\Omega_{2n+2}^{B_n(M)}$ :

Ist  $M$  eine  $(n-1)$ -zusammenhängende  $m$ -dimensionale fast-parallelisierbare Mannigfaltigkeit,  $m=2n, 2n+1$ , so ist nach Hilfssatz 2.3 der Normalen- $n$ -Typ  $B_n(M) \rightarrow BO$  durch die Faserung

$$K(\pi_n(M)) \times BO\langle n+2 \rangle \xrightarrow{\text{Pontrjagin}} BO \quad \text{gegeben.}$$

Wesentlicher Bestandteil der Berechnung von  $\pi_0 \text{Diff}(M)$ ,

bzw.  $\pi_1 \text{Diff}(M)$ , falls  $\dim M = 2n$ , ist die Bestimmung von  $\Omega_{2n+1}^{B_n(M)}$  und  $\Omega_{2n+2}^{B_n(M)}$ . Sei im folgenden  $K_n = K(\pi_n(M), n)$ .

Die Thom-Pontrjagin-Konstruktion liefert einen Isomorphismus zwischen  $\Omega_q^{B_n(M)}$  und  $\pi_q(K_n^+ \wedge MO\langle n+2 \rangle)$ , wobei  $MO\langle n+2 \rangle$  das Thom-Spektrum über dem  $(n+1)$ -zusammenhängenden Cover über  $BO$

ist. Zur Berechnung von  $\pi_q(K_n^+ \wedge MO\langle n+2 \rangle)$ ,  $q=2n+2, 2n+1$ , sollen Kofasersequenzen verwendet werden.

Die Inklusion des Sphären-Spektrums  $S^0 \longrightarrow MO\langle n+2 \rangle$  als unterste Zelle liefert nach Bilden des Smash-Produktes mit  $K_n$  eine Kofasersequenz von Spektren

$$(*) \quad K_n \longrightarrow K_n \wedge MO\langle n+2 \rangle \longrightarrow K_n \wedge MO\langle n+2 \rangle / S^0 .$$

Es gibt eine Spektren-Abbildung  $c: MO\langle n+2 \rangle / S^0 \longrightarrow bo\langle n+2 \rangle$ , die eine  $(2n+4)$ -Äquivalenz ist [St].

Dabei ist  $bo\langle n+2 \rangle$  das  $\Omega$ -Spektrum, dessen  $8i$ -ter Term  $BO\langle n+2+8i \rangle$  ist und dessen Verbindungsabbildungen durch die Bott-Periodizität gegeben sind.

Dann gilt für  $q=2n+3, 2n+2, 2n+1$ , daß für  $n \geq 3$

$$(Id_{K_n} \wedge c)_*: \pi_q(K_n \wedge MO\langle n+2 \rangle / S^0) \longrightarrow \pi_q(K_n \wedge bo\langle n+2 \rangle)$$

ein Isomorphismus ist. Aus der exakten Sequenz zur Kofasersequenz (\*)

und diesen Isomorphismen bekommt man nun eine exakte Sequenz

$$\begin{aligned} (**) \quad \pi_{2n+3}(K_n \wedge bo\langle n+2 \rangle) &\longrightarrow \pi_{2n+2}^s(K_n) \longrightarrow \pi_{2n+2}(K_n \wedge MO\langle n+2 \rangle) \\ &\longrightarrow \pi_{2n+2}^s(K_n \wedge bo\langle n+2 \rangle) \longrightarrow \pi_{2n+1}^s(K_n) \longrightarrow \pi_{2n+1}(K_n \wedge MO\langle n+2 \rangle) \\ &\longrightarrow \pi_{2n+1}(K_n \wedge bo\langle n+2 \rangle) . \end{aligned}$$

Hilfssatz 7.1: Sei  $n \geq 3$ .

Es gibt exakte Sequenzen

$$\begin{aligned} a) \quad \pi_{2n+3}(K_n \wedge bo\langle n+2 \rangle) &\longrightarrow \pi_{2n+2}^s(K_n) \longrightarrow \pi_{2n+2}(K_n \wedge MO\langle n+2 \rangle) \\ &\longrightarrow H_n(K_n; \pi_{n+2}(BO)) \longrightarrow \pi_{2n+1}^s(K_n) \longrightarrow \pi_{2n+1}(K_n \wedge MO\langle n+2 \rangle) \longrightarrow 0 . \\ b) \quad \pi_n^{(M)} \otimes \pi_{n+3}(BO) &\longrightarrow \pi_{2n+3}(K_n \wedge bo\langle n+2 \rangle) \longrightarrow H_{n+1}(K_n; \pi_{n+2}(BO)) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Beweis:  $K_n \wedge bo\langle n+2 \rangle$  ist  $(2n+1)$ -zusammenhängend. Also ist zunächst

$$\pi_{2n+1}^s(K_n) \longrightarrow \pi_{2n+1}(K_n \wedge MO\langle n+2 \rangle) \text{ surjektiv.}$$

Es gilt  $\pi_{n+2}(bo\langle n+2 \rangle) \cong \pi_{n+2}(BO\langle n+2 \rangle) \cong \pi_{n+2}(BO)$ . Die davon induzierte kanonische Spektren-Abbildung  $bo\langle n+2 \rangle \rightarrow \Sigma^{n+2} K(\pi_{n+2}(BO))$

ist eine  $(n+3)$ -Äquivalenz. Die Kofaser dieser Abbildung  $\underline{X}$  ist  $(n+3)$ -zusammenhängend, d.h.  $K_n \wedge \underline{X}$  ist  $(2n+3)$ -zusammenhängend.

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt } \pi_{2n+2}(K_n \wedge \text{bo} \langle n+2 \rangle) &\cong \pi_{2n+2}(K_n \wedge \Sigma^{n+2} K(\pi_{n+2}(BO))) \\ &= H_n(K_n; \pi_{n+2}(BO)). \end{aligned}$$

Aus der exakten Sequenz (\*\*) folgt damit a).

$$\text{Wegen } \pi_{2n+4}(K_n \wedge \underline{X}) \cong H_{2n+4}(K_n \wedge \underline{X}) = H_n(K_n) \otimes H_{n+4}(\underline{X})$$

$$\cong H_n(K_n) \otimes \pi_{n+4}(\underline{X}) = H_n(K_n) \otimes \pi_{n+3}(\text{bo} \langle n+2 \rangle) = H_n(K_n) \otimes \pi_{n+3}(BO)$$

und  $\pi_{2n+3}(K_n \wedge \Sigma^{n+2} K(\pi_{n+2}(BO))) = H_{n+1}(K_n; \pi_{n+2}(BO))$  erhält man aus der exakten Sequenz

$$\pi_{2n+4}(K_n \wedge \underline{X}) \longrightarrow \pi_{2n+3}(K_n \wedge \text{bo} \langle n+2 \rangle) \longrightarrow \pi_{2n+3}(K_n \wedge \Sigma^{n+2} K(\pi_{n+2}(BO))) \longrightarrow 0$$

die behauptete Sequenz b) für  $\pi_{2n+3}(K_n \wedge \text{bo} \langle n+2 \rangle)$ .

q.e.d.

Wir beschäftigen uns nun mit dem Fall, daß  $\pi_n(M)$  torsionsfrei

ist. Nach Wahl einer Basis läßt sich  $\pi_n(M)$  mit  $\mathbb{Z}^r$  und

$$K_n \text{ mit } K(\mathbb{Z}^r, n) = \bigoplus_{i=1}^r K_i, \quad K_i = K(\mathbb{Z}, n) \text{ identifizieren.}$$

Hilfssatz 7.2: Für  $n \geq 3$  sind die durch die Inklusionen induzierten Abbildungen

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i=1}^r \pi_{2n+1}^s(K_i) &\longrightarrow \pi_{2n+1}^s(K(\mathbb{Z}^r, n)) \\ \bigoplus_{i=1}^r \pi_{2n+2}^s(K_i) \oplus \bigoplus_{i < j} \pi_{2n+2}^s(K_i \wedge K_j) &\longrightarrow \pi_{2n+2}^s(K(\mathbb{Z}^r, n)) \end{aligned}$$

Isomorphismen.

$$\text{Es gilt } \pi_{2n+1}^s(K_i) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \equiv 1 \pmod{2} \text{ und } n \geq 5 \\ \mathbb{Z}_2, & \text{falls } n \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

$$\text{und } \pi_{2n+2}^s(K_i \wedge K_j) = \mathbb{Z}_2,$$

Beweis: Das Suspensions-Spektrum  $K(\mathbb{Z}^r, n) = \bigoplus_{i=1}^r K_i$

zerfällt in ein Wedge von  $\bigvee_{i=1}^r K_i, \bigvee_{i < j} K_i \wedge K_j, \bigvee_{i < j < k} K_i \wedge K_j \wedge K_k,$

$\dots, \bigvee_{i=1}^r K_i$ . Ein  $t$ -faches Smash-Produkt dieser Suspensions-

Spektren ist  $(nt-1)$ -zusammenhängend. Für  $n \geq 3$  spielt deshalb

zur Berechnung von  $\pi_{2n+j}^s(K(\mathbb{Z}^r, n))$ ,  $j=1,2$ , nur  $\bigvee_{i=1}^r K_i$  und  $\bigvee_{i=1}^r K_i \wedge K_j$  eine Rolle.

Wir zeigen, daß mit  $K = K(\mathbb{Z}, n)$   $\pi_{2n+1}^s(K \wedge K) = 0$  und

$$\pi_{2n+2}^s(K \wedge K) = \mathbb{Z}_2 \text{ gilt.}$$

Für einen  $(n-1)$ -zusammenhängenden Raum  $X$ ,  $n \geq 3$ , gibt es eine exakte Sequenz

$$\pi_{n+2}(X) \longrightarrow H_{n+2}(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow \pi_n(X) \xrightarrow{2} \pi_n(X) \longrightarrow \pi_{n+1}(X) \longrightarrow H_{n+1}(X; \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

[Wh, XII, 3.12]. Für  $X = K$  erhält man daraus

$$H_{n+2}(K; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 \text{ und } H_{n+1}(K; \mathbb{Z}) = \{0\}.$$

Damit folgt nun

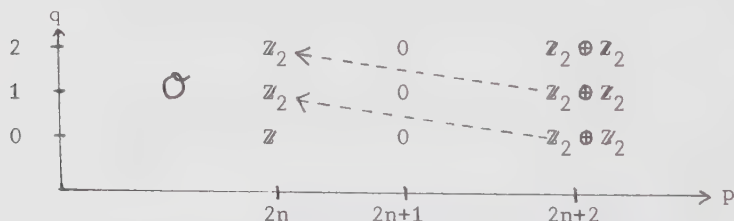
$$H_{2n}(K \wedge K; \mathbb{Z}) = H_n(K; \mathbb{Z}) \otimes H_n(K; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

$$H_{2n+1}(K \wedge K; \mathbb{Z}) = \{0\} \text{ und}$$

$$H_{2n+2}(K \wedge K; \mathbb{Z}) = H_{n+2}(K; \mathbb{Z}) \otimes H_n(K; \mathbb{Z}) \oplus H_n(K; \mathbb{Z}) \otimes H_{n+2}(K; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Für den  $E^2$ -Term der Atiyah-Hirzebruch-Spektralsequenz zur

Berechnung von  $\pi_{2n+j}^s(K \wedge K)$  erhält man folgendes Tableau:



$$E_{p,q}^2 = \tilde{H}_p(K \wedge K; \pi_q^s)$$

Die eingezeichneten Differentiale sind nach Reduktion modulo 2 dual zu  $Sq^2$  (Vgl. [Zü]).

Ist  $\zeta \in H^n(K; \mathbb{Z}_2)$  der Erzeuger, so gilt in  $H^*(K \wedge K; \mathbb{Z}_2)$

$$Sq^2(\zeta \otimes \zeta) = Sq^2\zeta \otimes \zeta + \zeta \otimes Sq^2\zeta, \text{ und } Sq^2\zeta \neq 0 \text{ in } H^{n+2}(K; \mathbb{Z}_2).$$

Also sind beide Differentiale nichttrivial, und daraus folgt

$$\pi_{2n+2}^s(K \wedge K) = \mathbb{Z}_2 \text{ und } \pi_{2n+1}^s(K \wedge K) = 0.$$

Der 2-primäre Anteil von  $\pi_{2n+1}^s(K)$  ist  $\mathbb{Z}_2$  für  $n \equiv 0 \pmod{2}$  und 0 für  $n \equiv 1 \pmod{2}$ . [Ma, Wi] .

Daß der p-primäre Anteil von  $\pi_{2n+1}^s(K)$  für  $p > 2$  und  $n \geq 4$  null ist, folgt aus Hilfssatz 7.2.a).

q.e.d.

### Hilfssatz 7.2.a)

Sei p eine Primzahl,  $p \neq 2$ , und  $K = K(\mathbb{Z}, n)$ .

Dann ist für  $j < \min \{n-2, 2p-3\} = r(n, p)$  der p-primäre Anteil von  $\pi_{2n+j}^s(K)$  null.

Insbesondere hat für  $n \geq 4$   $\pi_{2n+1}^s(K)$  und für  $n \geq 5$   $\pi_{2n+2}^s(K)$  keine p-Torsion.

### Beweis:

Für  $L \in \mathbb{N}$  sei  $\Gamma_L(K) = S^{L-1} \times_{\mathbb{Z}_2} K \wedge K$ , wobei  $\mathbb{Z}_2$  auf  $S^{L-1}$  antipodal und auf  $K \wedge K$  durch Vertauschen operiert.

Dann gibt es für  $i < 3n-2$  eine exakte Sequenz

$$\rightarrow \pi_{i+L}(\Sigma^L K) \rightarrow \pi_i(\Gamma_L(K)) \rightarrow \pi_{i-1}(K) \rightarrow [\text{Mil, Theorem 1.11}],$$

d.h. in unserer Situation gilt bei genügend großem L

$$\text{für } j < n-2 \quad \pi_{2n+j}^s(K) \cong \pi_{2n+j}(\Gamma_L(K)).$$

Es gibt Abbildungen  $J: K \wedge K \rightarrow \Gamma_L(K)$  und  $K: \Gamma_L(K) \rightarrow \Sigma^{L-1} K \wedge K$ ,

so daß in  $\mathbb{Z}_p$ -Kohomologie Kern  $J^* = \text{Bild } K^*$  gilt [Mil, Prop. 3.1] .

Für großes L ist also  $J^*: H^{2n+j}(\Gamma_L(K); \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^{2n+j}(K \wedge K; \mathbb{Z}_p)$

für  $j \leq r(n, p)$  injektiv.

Da  $H^q(K; \mathbb{Z}_p) = 0$  für  $n < q < 2(p-1) + n$  gilt,

folgt  $H^{2n+j}(K \wedge K; \mathbb{Z}_p) = 0$  für  $0 < j < 2p-2$ .

Also induziert entweder

$$\varphi: S^{2n} = S^n \wedge S^n \xrightarrow{J} \Gamma_L(K) \quad \text{oder}$$

$\varphi': \{x_0\} \hookrightarrow \Gamma_L(K)$  einen Isomorphismus in  $\mathbb{Z}_p$ -Homologie für

$q < 2n+2p-2$ .

Sei  $\mathcal{C}$  das Serre-Ideal der endlichen Gruppen mit Ordnung prim zu  $p$ . Dann ist  $\mathcal{V}$  oder  $\mathcal{V}'$  eine  $(2n+2p-2)\text{-}\mathbb{Z}_p$ -Homologie-Äquivalenz, also nach dem verallgemeinerten Satz von Whitehead eine  $(2n+2p-2)$ -Äquivalenz mod  $\mathcal{C}$  für Homotopie-Gruppen. Insbesondere ist entweder  $\mathcal{V}_*: \pi_q(S^{2n}) \longrightarrow \pi_q(\Gamma_L(K))$  oder  $\mathcal{V}'_*: \pi_q(x_0) \longrightarrow \pi_q(\Gamma_L(K))$  für  $q < 2n+2p-2$  ein Isomorphismus mod  $\mathcal{C}$ .

Da für  $\pi_{2n+j}(S^{2n})$  die  $p$ -primäre Komponente für  $j < 2p-3$  null ist [Spa, 7.13], und  $\pi_{2n+j}(x_0) = \{0\}$  für alle  $j$ , folgt die Behauptung für  $\pi_q(\Gamma_L(K))$ .

q.e.d.

B) Die instabilen Twistinvarianten eines Diffeomorphismus:

Bei der Berechnung von  $\pi_0 \text{Diff}(M)$  für  $(n-1)$ -zusammenhängende fast-parallelisierbare  $2n$ -Mannigfaltigkeiten in  $[Kr_3]$  spielen die Twistinvarianten eines Diffeomorphismus eine wichtige Rolle.

Das nächste Ziel ist es, die Elemente von  $\pi_{2n+1}(K_n \wedge MO_{<n+2>})$  mit den instabilen Twistinvarianten der entsprechenden Diffeomorphismen in Verbindung zu bringen.

Zunächst soll an die Definition der Twistinvariante erinnert werden (Vgl.  $[Kr_3]$ ).

Sei  $f: M \rightarrow M$  ein Diffeomorphismus, der in der Homologie trivial operiert und  $x \in H_n(M; \mathbb{Z})$ .  $x$  läßt sich durch eine eingebettete Sphäre  $S^n \subset M^{2n}$  repräsentieren, und  $f$  läßt sich isotop so abändern, daß  $f|_{S^n} = \text{Id}$  gilt und  $f$  eine Umgebung von  $D_-^n \subset S^n$  ebenfalls punktweise festläßt.

Die Operation von  $f$  auf einer Umgebung von  $D_+^n$  ist dann durch eine Homotopieklasse  $(D_+^n, \partial D_+^n) \rightarrow (SO_n, \{\text{Id}\})$  aus  $\pi_n(SO_n)$  gegeben. Die Suspension dieses Elementes in  $\pi_n(SO_n) \subset \pi_n(SO_{n+1})$  hängt nur von der Isotopieklasse von  $f$  und der durch die Sphäre repräsentierte Homologiekategorie  $x$  ab und wird mit  $\chi(f)(x)$  bezeichnet.

Diese Konstruktion liefert einen Homomorphismus

$$\pi_0 S \text{Diff}(M) \xrightarrow{\chi} \text{Hom}(H_n(M), \pi_n(SO_n))$$

$$(\pi_0 S \text{Diff}(M) = \{ f \in \pi_0 \text{Diff}(M) \mid f_* = \text{Id} \text{ in } H_n(M; \mathbb{Z}) \}).$$

Ist  $n \equiv 0 \pmod{2}$ ,  $n \neq 2, 6$ , so läßt sich Kern  $(\pi_n(SO_n) \rightarrow \pi_n(SO)) = K\pi_n(SO_n)$  mit  $\mathbb{Z}_2$  identifizieren. (Für  $n \equiv 1 \pmod{2}$  ist dieser Kern trivial.)

Im folgenden werden wir über die Thom-Pontrjagin-Konstruktion

$\mathcal{Q}_{2n+1}^{B_n(M)} = \mathcal{Q}_{2n+1}^{\langle n+2 \rangle}(K_n)$  mit  $\pi_{2n+1}(K_n^+ \wedge MO\langle n+2 \rangle)$  und  $\widetilde{\mathcal{Q}}_{2n+1}^{\langle n+2 \rangle}(K_n)$  mit  $\pi_{2n+1}(K_n \wedge MO\langle n+2 \rangle)$  identifizieren.

Satz 7.3:

Sei  $n \equiv 0 \pmod{2}$ ,  $n \neq 2, 6$ .

Dann gibt es einen Isomorphismus

$$\bar{\phi} : \pi_{2n+1}(K_n \wedge MO\langle n+2 \rangle) \longrightarrow \text{Hom}(H_n(M; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2)$$

mit folgender Eigenschaft:

Repräsentiert  $\gamma \in NS_n(D^1 \times M; \bar{\gamma}_1)$  die Isotopieklasse eines Diffeomorphismus  $f$ , so daß die  $\gamma(\gamma) \in \mathcal{Q}_{2n+1}^{\langle n+2 \rangle}(K_n)$  unterliegende  $BO\langle n+2 \rangle$ -Mannigfaltigkeit in  $\mathcal{Q}_{2n+1}^{\langle n+2 \rangle}$  null ist, so gilt  $\chi(f) = \bar{\phi}(\gamma(\gamma))$ .

$\bar{\phi}$  läßt sich zu einem Homomorphismus

$$\bar{\phi} : \pi_{2n+1}(K_n^+ \wedge MO\langle n+2 \rangle) \longrightarrow \text{Hom}(H_n(M; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2) \text{ fortsetzen,}$$

so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} NS_n(D^1 \times M; \bar{\gamma}_1) & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{Q}_{2n+1}^{\langle n+2 \rangle}(K_n) = \pi_{2n+1}(K_n^+ \wedge MO\langle n+2 \rangle) \\ \downarrow \beta_\gamma & & \downarrow \bar{\phi} \\ \pi_0 S \text{ Diff}(M) & & \text{Hom}(H_n(M; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2) \\ \pi_0 S \text{ Diff}(M) & \xrightarrow{\chi} & \text{Hom}(H_n(M; \mathbb{Z}), S\pi_n(SO_n)) \end{array}$$

Zum Beweis von Satz 7.3 benötigen wir folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz 7.4: Ist  $n \equiv 0 \pmod{2}$ ,  $n \neq 2, 6$ , so gibt es einen

Isomorphismus  $\phi : \pi_{2n+1}(K(\mathbb{Z}, n) \wedge MO\langle n+2 \rangle) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ . Repräsentiert

$\bar{\gamma}_N = (\gamma, \bar{\gamma}_N) : N \longrightarrow K(\mathbb{Z}, n) \times BO\langle n+2 \rangle$  über die Thom-Pontrjagin-Konstruktion ein Element in  $\pi_{2n+1}(K(\mathbb{Z}, n) \wedge MO\langle n+2 \rangle)$  und läßt sich das Poincaré-Duale der durch  $\gamma$  gegebenen Kohomologiekategorie durch eine eingebettete Sphäre  $S^{n+1} \subset N$  repräsentieren, so ist  $[N, \bar{\gamma}_N]$  genau dann null, wenn  $\gamma(S^{n+1}, N \times I)$  trivial ist.

Beweis von Hilfssatz 7.4:

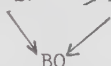
Sei  $r \gg n$  und  $\gamma_{n+2}^r$  das  $r$ -dimensionale universelle Bündel über dem  $(n+1)$ -zusammenhängenden Cover über  $BO(r)$ . Ist  $n \geq 3$ ,  $n \neq 6$ , so gilt für die  $(n+2)$ -te Wu-Klasse von  $\gamma_{n+2}^r$

$$v_{n+2}(\gamma_{n+2}^r) = w_{n+2}(\gamma_{n+2}^r) = 0$$

(Vgl. [St])

Also gibt es eine Abbildung  $\alpha: BO\langle n+2 \rangle \rightarrow BO\langle v_{n+2} \rangle$ , so daß

das Diagramm  $BO\langle n+2 \rangle \xrightarrow{\alpha} BO\langle v_{n+2} \rangle$  kommutiert



( $BO\langle v_{n+2} \rangle$ : von der universellen Wu-Klasse  $v_{n+2}: BO \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, n+2)$  induzierte Faserung).

Sei  $\lambda$  die Komposition

$$\begin{aligned} \pi_{2n+1}(K(\mathbb{Z}, n) \wedge MO\langle n+2 \rangle) &\longrightarrow \pi_{2n+2}(\Sigma K(\mathbb{Z}, n) \wedge MO\langle n+2 \rangle) \\ &\xrightarrow{(\varepsilon_n \wedge t(\alpha))_*} \pi_{2n+2}(K(\mathbb{Z}_2, n+1) \wedge MO\langle v_{n+1} \rangle), \end{aligned}$$

wobei die erste Abbildung der Suspensionsisomorphismus,

$t(\alpha)$  die Thom-Raum-Abbildung zu  $\alpha$  und  $\varepsilon_n: \Sigma K(\mathbb{Z}, n) \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, n+1)$  die nichttriviale Abbildung ist.

Ist  $N \subset S^{2n+1+r}$  eingebettet, so wird  $[N, \bar{\gamma}_N] \in \pi_{2n+1}(K(\mathbb{Z}, n) \wedge MO\langle n+2 \rangle)$

induziert von einer Abbildung

$$\begin{aligned} S^{2n+1+r} &\xrightarrow{t} T(\mathcal{V}(N, S^{2n+1+r})) \xrightarrow{\bar{\Delta}} N_+ \wedge T(\mathcal{V}(N, S^{2n+1+r})) \\ &\xrightarrow{\gamma_N^*(\gamma_N^r)} K(\mathbb{Z}, n) \wedge T(\gamma_{n+2}^r) \end{aligned}$$

$t$  ist die Abbildung, die eine Tubenumgebung von  $N$  in  $S^{2n+1+r}$  mit dem Normalenbündel  $\mathcal{V}(N, S^{2n+1+r})$  identifiziert und das Komplement dieser Tubenabbildung auf einen Punkt abbildet.

$\bar{\Delta}$  ist durch die Diagonale

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}(N, S^{2n+1+r}) & \longrightarrow & \varepsilon_N^0 \times \mathcal{V}(N, S^{2n+1+r}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \xrightarrow{\Delta} & N \times N \end{array}$$

induziert.

Dann wird  $\lambda(N, \overline{V}_N)$  induziert von

$$\begin{aligned} S^{2n+2+r} &= \sum S^{2n+1+r} \xrightarrow{\Sigma t} \Sigma T(V(N, S^{2n+1+r})) \\ \xrightarrow{\Sigma \overline{\Delta}} &\Sigma N_+ \wedge T(V(N, S^{2n+1+r})) \xrightarrow{\Sigma \varphi \wedge id} \Sigma K(\mathbb{Z}, n) \wedge T(V(N, S^{2n+1+r})) \\ &\xrightarrow{\Sigma \varphi \wedge (id \circ \overline{\varphi}_N)} K(\mathbb{Z}_2, n+1) \wedge T(\overline{V}_{\mathbb{Z}_2, n+2}^r). \end{aligned}$$

Diese Abbildung stimmt mit folgender Abbildung überein, die in [Br] zur Entdeckung des Normalenbündels einer  $(n+1)$ -dimensionaler Sphäre in einer  $(2n+2)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit benutzt wird:

$$\begin{aligned} S^{2n+2+r} &\longrightarrow S^{2n+1+r} \times I / S^{2n+1+r} \times \partial I \\ &\xrightarrow{t^i} T(V(N \times I, S^{2n+1+r} \times I)) / T(V(N \times \partial I, S^{2n+1+r} \times \partial I)) \\ &\xrightarrow{pr \wedge id} N \times I / N \times \partial I \wedge T(V(N \times I, S^{2n+1+r} \times I)) \\ &\xrightarrow{=} \Sigma N_+ \wedge T(V(N \times I, S^{2n+1+r} \times I)) \\ &\xrightarrow{\Sigma \varphi \wedge (id \circ \overline{\varphi}_N)} K(\mathbb{Z}_2, n+1) \wedge T(\overline{V}_{\mathbb{Z}_2, n+2}^r) \end{aligned}$$

Aus den Arbeiten von Browder und Brown [Br, Le.3.2,3.3] [Bro] erhält man folgende Aussage über diese Abbildung (Vgl. auch [Jo, Re]):

(\*) Es gibt einen surjektiven Homomorphismus

$$\varepsilon: \pi_{2n+2}^S(K(\mathbb{Z}_2, n+1) \wedge MO\langle v_{n+2} \rangle) \longrightarrow \mathbb{Z}_4,$$

und es gilt  $\varepsilon \circ \lambda[N, \overline{V}_N] = 2 \in \mathbb{Z}_4$  (bzw. 0), falls das

Poincaré-Duale von  $\varphi^* \mathbb{Z}_2$  durch eine Sphäre mit nichttrivialem Normalenbündel (bzw. trivialem Normalenbündel) repräsentiert werden kann.

Wegen  $\pi_{2n+1}^S(K(\mathbb{Z}, n)) = \mathbb{Z}_2$  (Hilfssatz 7.2) und der Surjektivität von  $\pi_{2n+1}^S(K(\mathbb{Z}, n)) \longrightarrow \pi_{2n+1}^S(K(\mathbb{Z}, n) \wedge MO\langle n+2 \rangle)$  (Hilfssatz 7.1) ist  $\pi_{2n+1}^S(K(\mathbb{Z}, n) \wedge MO\langle n+2 \rangle)$  null oder  $\mathbb{Z}_2$ . Wir zeigen nun, daß  $\varepsilon \circ \lambda$  nichttrivial ist, woraus dann zusammen mit (\*) die Aussage des Hilfssatzes folgt.

Sei  $S(\tau_{n+1})$  das Sphärenbündel des Tangentialbündels der  $S^{n+1}$ .  
 $S(\tau_{n+1})$  läßt sich mit einer  $BO\langle n+2 \rangle$ -Struktur  $\bar{\gamma}$  versehen. Ferner  
 ist  $\pi_n(S(\tau_{n+1})) \cong \mathbb{Z}$ , repräsentiert durch die Inklusion einer  
 Faser. Das Poincaré-Duale zu dem entsprechenden Erzeuger von  
 $H^n(S(\tau_{n+1})) = \mathbb{Z}$  ist gegeben durch einen Schnitt  
 $s: S^{n+1} \longrightarrow S(\tau_{n+1})$ . Es gilt  $\vee(s(S^{n+1}), S(\tau_{n+1})) \oplus \varepsilon^1 \cong \tau_{n+1}$ ,  
 d.h. für die durch  $S(\tau_{n+1})$  repräsentierte  $K(\mathbb{Z}, n) \times BO\langle n+2 \rangle$  -  
 Mannigfaltigkeit ist wegen (\*) die Invariante  $\xi \cdot \lambda$  von null ver-  
 schieden.

q.e.d.

### Beweis von Satz 7.3:

Wir definieren zunächst

$$\tilde{\phi}: \pi_{2n+1}(K(\pi_n(M)) \wedge MO\langle n+2 \rangle) \longrightarrow \text{Hom}(H^n(M), \mathbb{Z}_2).$$

Sei  $\bar{\gamma}_M = (\gamma', \tilde{\gamma}_m): M \longrightarrow K(\pi_n(M), n) \times BO\langle n+2 \rangle$  das fest gewählte  
 $n$ -Smoothing von  $M$ , s.d.  $\gamma'_*: \pi_n(M) \longrightarrow \pi_n(K(\pi_n(M))) = \pi_n(M)$  o.B.d.A.  
 die Identität ist.

Wir betrachten eine  $K(\pi_n(M) \times BO\langle n+2 \rangle)$ -Mannigfaltigkeit  $\omega = (N, (\gamma, \tilde{\gamma}_N))$

so daß  $[N, \tilde{\gamma}_N] \in \pi_{2n+1}^{<n+2>}$  null ist. Jedes  $a \in H^n(M; \mathbb{Z})$  definiert eine  
 Abbildung  $\gamma_a: K(\pi_n(M)) \longrightarrow K(\mathbb{Z}, n)$ , und  $\gamma_a$  induziert eine  
 Abbildung  $(\gamma_a)_*: \pi_{2n+1}(K(\pi_n(M)) \wedge MO\langle n+2 \rangle) \longrightarrow \pi_{2n+1}(K(\mathbb{Z}, n) \wedge MO\langle n+2 \rangle)$ .  
 Definiere  $\tilde{\phi}(\omega)(a) = \phi \circ (\gamma_a)_*(\omega)$ , wobei  $\phi: \pi_{2n+1}(K(\mathbb{Z}, n) \wedge MO\langle n+2 \rangle)$   
 $\longrightarrow \mathbb{Z}_2$

aus Hilfssatz 7.4 stammt.

$\bar{\phi}$  sei die Komposition von  $\tilde{\phi}$  mit der Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Hom}(H^n(M; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2) &\longrightarrow \text{Hom}(H_n(M; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2) \\ \beta &\longrightarrow (\bar{\beta} \mid \bar{\beta}(x) = \beta \Delta(x)) \end{aligned} ,$$

wobei  $\Delta: H_n(M; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^n(M; \mathbb{Z})$  der Poincaré-Dualitäts-Isomorphismus  
 ist.

Wir zeigen nun, daß  $\tilde{\phi}$  ein Isomorphismus ist.

Sei  $r = \text{rg } \pi_n(M)$  und  $K_n = K(\pi_n(M), n)$ .

Wegen  $\pi_{2n+1}^s(K_n) \cong \pi_{2n+1}^s(K(\mathbb{Z}^r, n)) \cong \mathbb{Z}_2^r$  (Hilfssatz 7.2),  
der Surjektivität von  $\pi_{2n+1}^s(K_n) \longrightarrow \pi_{2n+1}^s(K_n \wedge MO\langle n+2 \rangle)$  (Hilfssatz 7.1) und der Isomorphie  $\text{Hom}(H^n(M; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2^r$   
genügt es, die Surjektivität von  $\tilde{\phi}$  zu zeigen.

Sei  $(e_1, \dots, e_r)$  eine Basis von  $H_n(M; \mathbb{Z}) = \pi_n(M)$ .

$S(\tau_{n+1})$  bezeichne das Sphärenbündel des Tangentialbündels der  $S^{n+1}$  und  $f_i: S(\tau_{n+1}) \longrightarrow K_n$  die Abbildung mit  $f_{i*}[S_F^n] = e_i$ ,  
 $i=1, \dots, r$ ,

wobei die Inklusion einer Faser  $S_F^n$  den Erzeuger von  $\pi_n(S(\tau_{n+1}))$   
 $\cong \mathbb{Z}$  repräsentiert.

Definiere  $\omega_i \in \Omega_{2n+1}^{\langle n+2 \rangle}(K_n)$  durch  $\omega_i = (S(\tau_{n+1}), f_i, \tilde{\nu}_{S(\tau_{n+1})})$ .

Ist  $(e_1^*, \dots, e_r^*)$  die duale Basis zu  $(e_1, \dots, e_r)$ , so gilt

$\tilde{\phi}(\omega_i)(e_j^*) = \phi(\varphi_{e_j^*})(\omega_i) = \phi(S(\tau_{n+1}), \varphi_{e_j^*} \circ f_i, \tilde{\nu}_{S(\tau_{n+1})}) = \delta_{ij}$   
(Vgl. Beweis von 7.4). Daraus ergibt sich die Surjektivität  
von  $\tilde{\phi}$ . Also ist  $\tilde{\phi}$ , und damit auch  $\bar{\phi}$ , ein Isomorphismus.

Sei nun  $\mathcal{B} \in \text{NS}_n(D^1 \times M; \bar{\nu}_1)$  ein relatives Normalen-k-Smoothing  
auf  $D^1 \times M$ , repräsentiert durch  $(D_+^1 \times M, \bar{\nu}, \text{Id} + f)$ ,

$\omega = \eta(\zeta) \in \Omega_{2n+1}^{\langle n+2 \rangle}(K_n) = \pi_{2n+1}^s(K_n^+ \wedge MO\langle n+2 \rangle)$  wird repräsentiert  
durch  $D_+^1 \times M \xrightarrow{\text{Id} + f} D_+^1 \times M \longrightarrow K_n \times BO\langle n+2 \rangle$ .

$D_+^1 \times M \xrightarrow{\text{Id} + f} D_+^1 \times M$  ist diffeomorph zum Abbildungstor

$M_f = I \times M / (x, 0) \sim (f(x), 1)$ , so daß  $\omega$  in der Form  
 $(M_f, (\varphi, \tilde{\nu}_{M_f}))$  repräsentiert werden kann, wobei  $\varphi: M_f \longrightarrow K_n$   
 $\varphi'$  fortsetzt.

Durch zulässiges Surgery auf dem Erzeuger von  $\pi_1(M_f)$  läßt sich  
 $M_f$  in eine  $(n-1)$ -zusammenhängende  $K_n \times BO\langle n+2 \rangle$ -Mannigfaltigkeit  
verwandeln, die mit  $(\tilde{M}_f, (\varphi, \tilde{\nu}_{\tilde{M}_f}))$  bezeichnet werden soll.

Sei  $x \in H_n(M; \mathbb{Z})$ .  $x$  läßt sich durch eine eingebettete Sphäre  $S^n \subset M$  repräsentieren.

Aus  $(Id + f)^* \overline{\gamma}_1 = \overline{\gamma}|_{S \circ xM}$  folgt, daß  $\gamma'$  und  $\gamma' \circ f : M \rightarrow K_n$  homotop sind. Also folgt  $f_* = Id$  auf  $H_n(M; \mathbb{Z}) = \widetilde{H}_n(M)$ .

Deshalb läßt sich  $f$  bis auf Isotopie so wählen, daß  $f|_{S^n} = Id$  gilt. Die Homologieklassse  $[S^1 \times S^n] \in H_{n+1}(M_f; \mathbb{Z})$  ist in  $H_{n+1}(\widetilde{M}_f; \mathbb{Z})$  sphärisch, und das Normalenbündel dieser Sphäre  $S_x^{n+1}$  in  $\widetilde{M}_f \times I$  wird durch  $\chi(f)(x)$  klassifiziert.  $[Kr_3], [Schm]$ . Da das Normalenbündel von  $S_x^{n+1}$  in  $\widetilde{M}_f \times I$  wegen der  $BO\langle n+2 \rangle$ -Struktur von  $\widetilde{M}_f$  stabil trivial ist, liegt  $\chi(f)(x)$  in  $KS\pi_n(SO_n) \cong \mathbb{Z}_2$ .

Nach Voraussetzung ist  $(\widetilde{M}_f, \widetilde{\gamma}_f)$  in  $\mathcal{Q}_{2n+1}^{\langle n+2 \rangle}$  null. Es gilt ferner  $\overline{\phi}(\eta(\gamma))(x) = \widetilde{\phi}(\eta(\gamma))(\Delta^{-1}(x))$ , und  $\Delta^{-1}(x) \in H^n(M; \mathbb{Z}) \cong H^n(\widetilde{M}_f; \mathbb{Z})$  ist Poincaré-dual zu  $[S_x^{n+1}] \in H_{n+1}(\widetilde{M}_f; \mathbb{Z})$ .

Aus Hilfssatz 7.4 folgt damit  $\overline{\phi}(\eta(\gamma))(x) = \chi(f)(x)$ , und weil  $x$  beliebig war,  $\overline{\phi}(\eta(\gamma)) = \chi(f)$ .

Wir setzen nun  $\overline{\phi}$  auf  $\pi_{2n+1}(K_n^+ \wedge MO\langle n+2 \rangle)$  fort.

Angenommen,  $\omega = (N, (\gamma, \widetilde{\gamma}_N))$  ist eine beliebige  $(2n+1)$ -dimensionale  $K_n \times BO\langle n+2 \rangle$ -Mannigfaltigkeit. Da  $N$   $(n+1)$ -parallelisierbar, ist  $(N, \widetilde{\gamma}_N) \in \mathcal{Q}_{2n+1}^{\langle n+2 \rangle}$  bordant zu einer Homotopiesphäre  $(Z, \widetilde{\gamma}_Z)$ .

Dann ist  $(N \# -Z, \gamma \# -\widetilde{\gamma}_Z)$  null in  $\mathcal{Q}_{2n+1}^{\langle n+2 \rangle}$ , und wir definieren  $\overline{\phi}(\omega) = \overline{\phi}(N \# -Z, (\gamma, \widetilde{\gamma}_N \# -\widetilde{\gamma}_Z))$ .

Da die Homotopiesphäre die Normalenbündel  $(n+1)$ -dimensionaler Sphären nicht beeinflusst, folgt nach Definition von  $\overline{\phi}$  die Wohldefiniiertheit von  $\overline{\phi}$ .

Oben wurde bereits gezeigt, daß Bild  $\beta_1$  in  $\pi_0 S \text{Diff}(M)$  liegt, und genauso wie dort erhalten wir nun  $\overline{\phi} \circ \eta(\gamma) = \chi \circ \beta_1(\gamma)$ , d.h. die Kommutativität des angegebenen Diagramms.

C) Exakte Sequenzen für  $\pi_0 \text{Diff}(M)$  und  $\pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M)$  für  $(n-1)$ -zusammenhängende fast-parallelisierbare  $2n$ -Mannigfaltigkeiten

Satz 7.5:

Sei  $M$  eine  $(n-1)$ -zusammenhängende, fast-parallelisierbare  $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit,  $n \geq 3$ , und

$$\pi_0 S \text{Diff}(M) = \text{Kern} (\pi_0 \text{Diff}(M) \longrightarrow \text{Aut}(H_n(M)))$$

$$[f] \longmapsto f_*$$

Dann gibt es eine exakte Sequenz von Gruppen

$$(i) \quad 0 \longrightarrow \widehat{\Omega}_{2n+2}^{<n+2>}(K(\pi_n(M), n)) \xrightarrow{\bar{A}} \pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M) \xrightarrow{\bar{x}} \pi_1(SO) \\ \longrightarrow NS_n(D^1_{xM}, \bar{\gamma}_1) \xrightarrow{\bar{A}} \pi_0 S \text{Diff}(M) \xrightarrow{Sx} \text{Hom}(H_n(M), \pi_n(SO)) \longrightarrow 0.$$

$NS_n(D^1_{xM}; \bar{\gamma}_1)$  berechnet sich für  $n \neq 6$  aus der exakten Sequenz

$$(ii) \quad 0 \longrightarrow bP_{2n+2} \xrightarrow{\bar{\alpha}} NS_n(D^1_{xM}; \bar{\gamma}_1) \\ \xrightarrow{(\bar{\psi}, \bar{\phi}) \cdot \eta} \theta_{2n+1}/bP_{2n+2} \oplus \text{Hom}(H_n(M), K\pi_n(SO_n)) \longrightarrow 0.$$

$$\text{Es gilt } \widehat{\Omega}_{2n+2}^{<n+2>}(K(\pi_n(M), n)) = \theta_{2n+2} \oplus \widehat{\Omega}_{2n+2}^{<n+2>}(K(\pi_n(M), n))$$

und für  $n \equiv 0, 2, 3, 4 \pmod{8}$  gibt es eine exakte Sequenz

$$(iii) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \bigoplus_{i=1}^n \pi_{2n+2}^s(K(\mathbb{Z}, n)) \longrightarrow \widehat{\Omega}_{2n+2}^{<n+2>}(K(\pi_n(M), n)) \\ \longrightarrow \text{Hom}(H_n(M), \pi_{n+2}(BO)) \longrightarrow 0.$$

Ferner gilt

$$\pi_{2n+2}^s(K(\mathbb{Z}, n)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & n \equiv 0, 4 \pmod{8} \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, & n \equiv 3 \pmod{8}, n > 3 \\ 0, & n \equiv 2 \pmod{8} \end{cases}$$

Beweis:

Die Faserung  $K(\pi_n(M), n) \times BO^{<n+2>} \xrightarrow{p_{<n+2>} \circ pr_2} BO$  ist der Normalen- $n$ -Typ von  $M$ . Die Sequenz (i) wird aus der exakten Sequenz 4.5' hergeleitet. Dazu bestimmen wir zunächst

$\text{Aut}((B_n(M), p) \text{rel } \bar{\gamma}_j)$  für  $j = 2$  und  $j = 1$ .

Aus Hilfssatz 4.8.a) folgt für  $n \geq 3$

$\text{Aut}((B,p)\text{rel}\bar{\nu}_2) \cong \pi_2(F_n) \cong \pi_3(BO) = \{0\}$ . ( $B = B_n(M)$ ,  $F_n$  Faser).

Zur Berechnung von  $\text{Aut}((B,p)\text{rel}\bar{\nu}_1)$  verwenden wir Satz 4.7.

$X = M^{(n)}$  ist in diesem Fall ein Wedge von Sphären.

Die üblichen H-Raum-Strukturen von  $K(\pi_n(M), n)$  und  $BO\langle n+2 \rangle$  induzieren eine H-Gruppen-Struktur auf  $B^X$ . Da  $p = p_{\langle n+2 \rangle} \circ pr_2$ , ist  $\hat{p}$  eine H-Raum-Abbildung. Aus Satz 4.7 erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \text{eine exakte Sequenz } [\Sigma^2 X_+, B] &\xrightarrow{P_*} [\Sigma^2 X_+, BO] \\ &\longrightarrow \text{Aut}((B,p)\text{rel}\bar{\nu}_1) \longrightarrow [\Sigma X_+, B] \xrightarrow{P_*} [\Sigma X_+, BO] \end{aligned}$$

Da  $X = \bigvee_{i=1}^{\infty} S_i^n$ , erhalten wir daraus eine exakte Sequenz

$$\begin{aligned} [\bigvee_{i=1}^{\infty} \Sigma^2 S_i^n, B] \oplus \pi_2(B) &\xrightarrow{\begin{pmatrix} P_* & 0 \\ 0 & \hat{p}_* \end{pmatrix}} [\bigvee_{i=1}^{\infty} \Sigma^2 S_i^n, BO] \oplus \pi_2(BO) \\ &\longrightarrow \text{Aut}((B,p)\text{rel}\bar{\nu}_1) \longrightarrow [\bigvee_{i=1}^{\infty} \Sigma S_i^n, B] \oplus \pi_1(B) \end{aligned}$$

Es gilt  $\pi_{n+1}(B) = \{0\}$ ,  $\pi_2(B) = \{0\}$  und  $\pi_{n+2}(B) \xrightarrow{P_*} \pi_{n+2}(BO)$  ist ein Isomorphismus. Also folgt aus der hergeleiteten Sequenz  $\text{Aut}((B,p)\text{rel}\bar{\nu}_1) \cong \pi_2(BO) = \mathbb{Z}_2$ .

Definiert man  $\tilde{\chi}: \pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M) \longrightarrow \pi_1(SO)$  genauso wie im 4-dimensionalen Fall (§5,C), so sieht man ebenso wie dort, daß Kern  $\tilde{\chi} = \text{Kern } \gamma_1: \pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M) \longrightarrow \text{Aut}((B,p)\text{rel}\bar{\nu}_1)$  gilt.

Daraus folgt die Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} \pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M) & \xrightarrow{\gamma_1} & \text{Aut}((B,p)\text{rel}\bar{\nu}_1) \\ \downarrow \tilde{\chi} & & \downarrow \phi_n^1 \\ \pi_1(SO) & \xlongequal{\sim} & \pi_2(BO) \end{array}$$

Aus Satz 4.5' erhält man mit diesen Vorüberlegungen eine exakte Sequenz (S):

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{NS}_n(D^2 \times M; \bar{\nu}_2) &\xrightarrow{\beta_2} \pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M) \xrightarrow{\tilde{\chi}} \pi_1(SO) \\ &\xrightarrow{\alpha_1} \text{NS}_n(D^1 \times M; \bar{\nu}_1) \xrightarrow{\beta_1} \pi_0 \widetilde{\text{Diff}}(M) \xrightarrow{\gamma_0} \text{Aut}(B,p). \end{aligned}$$

Wir zeigen nun folgende Aussage:

(\*) Ist  $f: M \longrightarrow M$  ein Diffeomorphismus, so läßt sich

$\overline{\gamma}_M + f^* \overline{\gamma}_M: S^0 \times M \longrightarrow K(\mathcal{N}_n(M), n) \times BO\langle n+2 \rangle$  genau dann auf  $D_+^1 \times M$  fortsetzen (d.h.  $f \in \text{Bild } \beta_1: NS_n(D^1 \times M; \overline{\gamma}_1) \rightarrow \mathcal{N}_0 \widetilde{\text{Diff}}(M)$ ) wenn  $f_* = \text{Id}$  auf  $H_n(M; \mathbb{Z})$  gilt und die stabilisierte Twistinvariante  $SX(f) \in \text{Hom}(H_n(M; \mathbb{Z}), \mathcal{N}_n(SO))$  verschwindet.

Bereits beim Beweis von Satz 7.3 wurde gezeigt, daß für einen Diffeomorphismus im Bild von  $\beta_1$   $f_* = \text{Id}$  und  $SX(f) = 0$  gilt. Sei umgekehrt solch ein Diffeomorphismus gegeben. Dann läßt sich  $f$  isotop so abändern, daß  $f$  ein  $n$ -Gerüst  $M^{(n)} = \bigvee_{i=1}^n S_i^n$  festläßt.  $\overline{\gamma}_M$  und  $f^* \overline{\gamma}_M$  sind genau dann homotop über  $BO$ , wenn sich  $-\overline{\gamma}_1: -D_+^1 \times M \longrightarrow K(\mathcal{N}_n(M), n) \times BO\langle n+2 \rangle$  zu einem Lift auf  $D_+^1 \times M \cup_{\text{Id}, f} -D_+^1 \times M$  fortsetzen läßt.  $D_+^1 \times M \cup_{\text{Id}, f} -D_+^1 \times M$  ist diffeomorph zum Abbildungstorus  $M_f$ . Da  $f_* = \text{Id}$ , folgt aus der Wang-Sequenz von  $M_f$ , daß sich die Abbildung nach  $K(\mathcal{N}_n(M), n)$  fortsetzen läßt. Die Abbildung nach  $BO\langle n+2 \rangle$  läßt sich genau dann fortsetzen, wenn  $S^1 \times S_i^n \subset M_f$  stabil triviales Normalenbündel hat. Das ist genau dann der Fall, wenn die entsprechende sphärische Klasse  $S_i^{n+1}$  in  $\widetilde{M}_f$  (Siehe Beweis von 7.3) stabil triviales Normalenbündel hat.  $\mathcal{V}(S_i^{n+1}, \widetilde{M}_f \times I)$  wird von  $\chi(f)([S_i^n])$  klassifiziert. Aus  $SX(f) = 0$  folgt also, daß diese Fortsetzung möglich ist. Also sind  $f^* \overline{\gamma}_M$  und  $\overline{\gamma}_M$  homotop über  $BO$ , d.h.  $f \in \text{Kern } \gamma_o = \text{Bild } \beta_1$ .

Wegen  $\mathcal{N}_0 \text{Diff}(M) \xrightarrow{\cong} \mathcal{N}_0 \widetilde{\text{Diff}}(M)$  [Ce] erhält man mit  $\mathcal{N}_0 S \text{Diff}(M) = \{f \in \mathcal{N}_0 \text{Diff}(M) \mid f_* = \text{Id}\}$  aus der Sequenz (S) und der Aussage (\*) die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow NS_n(D^2 \times M; \overline{\gamma}_2) \xrightarrow{\tilde{R}} \mathcal{N}_1 \widetilde{\text{Diff}}(M) \xrightarrow{\tilde{\chi}} \mathcal{N}_1(SO) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_1} NS_n(D^1 \times M; \overline{\gamma}_1) \xrightarrow{\beta_1} \mathcal{N}_0 S \text{Diff}(M) \xrightarrow{SX} \text{Hom}(H_n(M; \mathbb{Z}), \mathcal{N}_n(SO)).$$

Aus [Kr<sub>3</sub>] entnehmen wir, daß  $SX$  surjektiv ist.

Wir kommen nun zur Berechnung von  $NS_n(D^j x M; \bar{\nu}_j)$  für  $j=2$  und  $j=1$ .

Aus Hilfssatz 3.9 folgt wegen  $v_{n+2}(M) = 0$  und  $H_{n+1}(M; \mathbb{Z}) = \{0\}$  die Minimalität von  $S(D^2 x M)$ . Also erhalten wir aus Satz 3.7 eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow NS_n(D^2 x M; \bar{\nu}_2) \xrightarrow{\eta} \Omega_{2n+2}^{K_n x B O \langle n+2 \rangle} \xrightarrow{\Theta} L_{2n+2}(e, S(D^2 x M)) \cong L_{2n+2}(e).$$

Es ist  $\Omega_{2n+2}^{K_n x B O \langle n+2 \rangle} = \Omega_{2n+2}^{\langle n+2 \rangle}(K(\pi_n(M), n))$  und

$$NS_n(D^2 x M; \bar{\nu}_2) = \text{Kern} \left( \Omega_{2n+2}^{K_n x B O \langle n+2 \rangle} \xrightarrow{\Theta} L_{2n+2}(e) \right) = \widetilde{\Omega}_{2n+2}^{\langle n+2 \rangle}(K(\pi_n(M), n)).$$

Ist  $n \begin{cases} \text{ungerade} \\ \text{gerade} \end{cases}$ , so gilt  $L_{2n+2}(e) = \begin{cases} \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}_2 \end{cases}$ , und  $\Theta(-)$

ist durch  $\frac{1}{8}$  der Signatur der unterliegenden Mannigfaltigkeit, bzw. durch die Arf-Invariante dieser Mannigfaltigkeit gegeben.

Also verschwindet  $\Theta$  auf  $\widetilde{\Omega}_{2n+2}^{\langle n+2 \rangle}(K(\pi_n(M), n))$ , so daß

$$\widetilde{\Omega}_{2n+2}^{\langle n+2 \rangle}(K(\pi_n(M), n)) = \widetilde{\Omega}_{2n+2}^{\langle n+2 \rangle}(K(\pi_n(M), n)) \oplus \widetilde{\Omega}_{2n+2}^{\langle n+2 \rangle}$$

mit  $\widetilde{\Omega}_{2n+2}^{\langle n+2 \rangle} = \text{Kern } \Theta: \Omega_{2n+2}^{\langle n+2 \rangle} \longrightarrow L_{2n+2}(e)$  gilt.

Aus der Berechnung von  $bP_{2n+2}$  folgt, daß die Sequenz

$$\Omega_{2n+2}^{\langle n+2 \rangle} \xrightarrow{\Theta} L_{2n+2}(e) \xrightarrow{\mu} bP_{2n+2} \longrightarrow 0$$

exakt ist. Dabei ist  $\mu$  die übliche Realisierungsabbildung, die für  $n \equiv 0 \pmod{2}$  das nichttriviale Element von  $\mathbb{Z}_2$  auf die Kervaire-Sphäre und für  $n \equiv 1 \pmod{2}$  ein Element  $n \in \mathbb{Z}$  auf eine Homotopiesphäre abbildet, die eine parallelisierbare Mannigfaltigkeit mit Signatur  $8n$  berandet.

Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \Omega_{2n+2}^{\langle n+2 \rangle}(K(\pi_n(M), n)) & \xrightarrow{\Theta} & L_{2n+2}(e) & \xrightarrow{\eta} & NS_n(D^1 x M; \bar{\nu}_1) \\ & \searrow \scriptstyle 0 & \downarrow \scriptstyle \mu & \nearrow \scriptstyle \bar{\alpha} & \\ & & bP_{2n+2} & & \end{array}$$

kommutativ, woraus wir für  $NS_n(D^1 x M; \bar{\nu}_1)$  mit Satz 3.7

$$0 \longrightarrow bP_{2n+2} \xrightarrow{\bar{\alpha}} NS_n(D^1 x M; \bar{\nu}_1) \xrightarrow{\eta} \widetilde{\Omega}_{2n+1}^{\langle n+2 \rangle}(K(\pi_n(M), n)) \oplus \Omega_{2n+1}^{\langle n+2 \rangle} \longrightarrow 0$$

erhalten.

Wir wollen  $\hat{\Omega}_{2n+2}^{<n+2>}$  mit  $\Theta_{2n+2}$  identifizieren.

Es gibt einen Isomorphismus  $\hat{\lambda}: \hat{\Omega}_{2n+2}^{<n+2>} \longrightarrow \Theta_{2n+2}$ .

$\hat{\lambda}$  ist wie folgt definiert.

Ist  $\omega \in \hat{\Omega}_{2n+2}^{<n+2>}$ , so ist  $\omega$  wegen  $\Theta(\omega) = 0$   $BO^{<n+2>}$ -bordant zu einer Homotopiesphäre  $(\Sigma, \bar{\Sigma})$ . Definiere  $\hat{\lambda}$  durch  $\hat{\lambda}(\omega) = \Sigma$ .

Da sich ein  $BO^{<n+2>}$ -Bordismus zwischen zwei  $(2n+2)$ -dimensionalen Homotopiesphären durch Surgery in einen  $h$ -Kobordismus verwandeln läßt, ist  $\hat{\lambda}$  wohldefiniert.

Man sieht leicht, daß  $\hat{\lambda}$  ein Isomorphismus ist.

Ähnlich wie für  $\hat{\Omega}_{2n+2}^{<n+2>} \cong \Theta_{2n+2}$  zeigt man mit Standardargumenten über Homotopiesphären und Surgery auf  $(k+1)$ -

parallelisierbaren Mannigfaltigkeiten, daß es einen

Isomorphismus  $\hat{\Omega}_{2n+1}^{<n+2>} \xrightarrow{\hat{\rho}} \Theta_{2n+1}/_{bP_{2n+2}}$  gibt.

Ist  $n \equiv 0 \pmod{2}$ ,  $n \neq 6$ , so ist  $KS\pi_n(SO_n) = \mathbb{Z}_2$

$\hat{\Omega}_{2n+1}^{<n+2>}(K(\pi_n(M), n))$  läßt sich mit Hilfe von Hilfssatz 7.3 mit  $\text{Hom}(H_n(M), \mathbb{Z}_2)$  identifizieren.

Für  $n \equiv 1 \pmod{2}$  ist nach Hilfssatz 7.2  $\pi_{2n+1}^S(K(\pi_n(M), n))$  null, und wegen der Surjektivität von

$\pi_{2n+1}^S(K(\pi_n(M), n)) \longrightarrow \pi_{2n+1}(K(\pi_n(M), n) \wedge MO^{<n+2>})$  (H.S.7.1) folgt in diesem Fall  $\hat{\Omega}_{2n+1}^{<n+2>}(K(\pi_n(M), n)) = \{0\}$ .

Da für  $n \equiv 1 \pmod{2}$   $KS\pi_n(M)$  null ist, folgt in beiden Fällen

$\hat{\Omega}_{2n+1}^{<n+2>}(K(\pi_n(M), n)) \cong \text{Hom}(H_n(M), KS\pi_n(SO_n))$ .

Damit ist auch die Sequenz (ii) bewiesen.

Es bleibt die Exaktheit von (iii) für  $n \equiv 0, 2, 3, 4 \pmod{8}$

zu zeigen. In diesen Fällen ist  $\pi_{n+3}(BO) = 0$ . Ferner ist

$H_{n+1}(K(\pi_n(M), n); \mathbb{Z}) = \{0\}$ , da  $\pi_n(M)$  torsionsfrei ist.

Aus Hilfssatz 7.1 folgt dann  $\pi_{2n+3}(K(\pi_n(M), n) \wedge bo\langle n+2 \rangle) = \{0\}$

Aus Hilfssatz 7.4 und Hilfssatz 7.2 folgt, daß

$\pi_{2n+1}^s(K_n) \rightarrow \pi_{2n+1}(K_n \wedge MO\langle n+2 \rangle)$  injektiv ist ( $K_n = K(\pi_n(M), n)$ )

so daß wir aus Hilfssatz 7.1 die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \pi_{2n+2}^s(K_n) \rightarrow \pi_{2n+2}(K_n \wedge MO\langle n+2 \rangle) \rightarrow \text{Hom}(H_n(M), \pi_{n+2}(BO)) \rightarrow 0$$

erhalten.

Die Berechnung von  $\pi_{2n+2}^s(K_n)$  wurde bereits in Hilfssatz 7.2 durchgeführt. Damit ergibt sich die exakte Sequenz (iii).

Die Berechnung von  $\pi_{2n+2}^s(K(\mathbb{Z}, n))$  entnimmt man [Ma, Wi]

und Hilfssatz 7.2.a).

q.e.d.

Wir wollen die sich aus Satz 7.5 ergebende Berechnung von  $\pi_0 S \text{Diff}(M)$  mit der Berechnung in [Kr<sub>3</sub>] vergleichen und dabei eine Aussage über  $\chi: \pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M) \rightarrow \pi_1(SO)$  gewinnen.

In [Kr<sub>3</sub>] ist für  $\pi_0 S \text{Diff}(M)$  die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \theta_{2n+1} / \Sigma_M \rightarrow \pi_0 S \text{Diff}(M) \xrightarrow{\chi} \text{Hom}(H_n(M), S\pi_n(SO_n)) \rightarrow 0$$

bewiesen worden. Dabei ist  $\Sigma_M \in \theta_{2n+1}$  eine Homotopiesphäre

der Ordnung  $\leq 2$ . In [Kr<sub>3</sub>] ist genauer untersucht worden,

wann  $\Sigma_M$  trivial ist. Dort wird auch gezeigt, daß  $\Sigma_M$  im

allgemeinen von der differenzierbaren Struktur von  $M$  abhängt.

Durch Vergleich mit Satz 7.5 erhält man ohne weiteres

folgendes Ergebnis.

Satz 7.6:

Sei  $M^{2n}$   $(n-1)$ -zusammenhängend und fast-parallelisierbar,  $n \geq 3$ ,

Dann gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \hat{\Omega}_{2n+2}^{<n+2>} (K(\pi_n(M), n)) \longrightarrow \pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M) \xrightarrow{\tilde{\chi}} \mathbb{Z}_2 .$$

$\tilde{\chi}$  ist genau dann surjektiv, wenn  $\Sigma_M$  null ist.

Insbesondere hängt auch  $\pi_1 \widetilde{\text{Diff}}(M)$  im allgemeinen von der differenzierbaren Struktur von  $M$  ab.

D)  $\pi_0 \text{Diff}(M)$  für gewisse  $(n-1)$ -zusammenhängende  
 $(2n+1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten

Es sei  $M$  eine  $(n-1)$ -zusammenhängende  $(2n+1)$ -dimensionale fast-parallelisierbare Mannigfaltigkeit. Es ist auch der Fall zugelassen, daß  $\pi_n(M)$  Torsion enthält.

Ist  $n \equiv 0 \pmod{2}$ ,  $n \neq 6$ , so setzen wir zusätzlich folgende Eigenschaft (E) für die Mannigfaltigkeit  $M$  voraus.

(E): Es gibt eine Basis von  $H_{n+1}(M; \mathbb{Z})$ , die durch Sphären mit trivialem Normalenbündel in  $D^1 \times M$  repräsentiert werden kann.

(E) ist z.B. für  $S^n \times S^{n+1} \# \dots \# S^n \times S^{n+1}$  erfüllt.

Mit  $\pi_0 \text{Diff}(M)$  sollen wieder die Isotopieklassen von Diffeomorphismen bezeichnet werden, die auf  $H_n(M; \mathbb{Z})$  trivial operieren.

Satz 7.7:

Sei  $M$  mit den oben beschriebenen Eigenschaften gegeben.

Es gelte  $n \geq 3$ ,  $n \neq 6$ .  $K_n$  bezeichne wieder  $K(\pi_n(M), n)$ .

Dann gibt es eine exakte Sequenz

$$\pi_1(SO) \xrightarrow{\bar{\alpha}_4} \hat{G}_{2n+2}^{\langle n+2 \rangle}(K_n) \xrightarrow{\bar{\beta}_4} \pi_0 \text{Diff}(M) \xrightarrow{sx} \text{Hom}(H_n(M), \pi_n(SO))$$

Ist  $n \equiv 3, 4 \pmod{8}$  und  $\pi_n(M)$  beliebig, so gilt

$$\hat{G}_{2n+2}^{\langle n+2 \rangle}(K_n) \cong \theta_{2n+2} \oplus \pi_{2n+2}^s(K_n).$$

Ist  $n \equiv 0, 2 \pmod{8}$ ,  $n \neq 6$  und  $\pi_n(M)$  torsionsfrei, so gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \pi_{2n+2}^s(K_n) \oplus \theta_{2n+2} \longrightarrow \hat{G}_{2n+2}^{\langle n+2 \rangle}(K_n) \longrightarrow H_n(M; \pi_{n+2}^s(BO)) \longrightarrow 0.$$

Bemerkung:

Identifiziert man  $\mathcal{T}_n(M)$  mit  $\mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{p_1}^{r_1} \oplus \mathbb{Z}_{p_2}^{r_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_s}^{r_s}$  so läßt sich  $\mathcal{T}_{2n+2}^S(K_n)$  ähnlich wie in Satz 7.2 weiter behandeln.

Beweis:

Die stabilisierte Twistinvariante  $SX(f) \in \text{Hom}(H_n(M; \mathbb{Z}), \mathcal{T}_n(SO))$  läßt sich genauso wie für  $(n-1)$ -zusammenhängende  $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten definieren.

Sei  $\overline{\mathcal{V}}_M = (\varphi, \overline{\mathcal{V}}_M): M \longrightarrow K_n \times BO\langle n+2 \rangle$  ein fest gewähltes Normalen- $k$ -Smoothing mit  $\varphi_* = \text{Id}$  auf  $\mathcal{T}_n(M)$ .

Wie in 7.5 läßt sich  $\overline{\mathcal{V}}_M + f^* \overline{\mathcal{V}}_M: S^0 \times M \longrightarrow K_n \times BO\langle n+2 \rangle$  genau dann auf  $D_+^1 \times M$  fortsetzen, wenn in der  $n$ -ten Homologie  $f_* = \text{Id}$  gilt und  $SX(f)$  verschwindet.

Nach Hilfssatz 4.8.b) ist  $\text{Aut}((B, p) \text{rel } \overline{\mathcal{V}}_1) \rightarrow \mathcal{T}_1(F_n) \cong \mathcal{T}_1(SO)$  injektiv. Aus Satz 4.5' erhalten wir deshalb mit

$\mathcal{T}_0 \text{Diff}(M) \cong \mathcal{T}_0 \widetilde{\text{Diff}}(M)$  [Ce] eine exakte Sequenz

$$\mathcal{T}_1(SO) \xrightarrow{\overline{\mathcal{A}}_1} NS_n(D^1 \times M; \overline{\mathcal{V}}_1) \xrightarrow{\beta_1} \mathcal{T}_0 S \text{Diff}(M) \xrightarrow{SX} \text{Hom}(H_n(M; \mathbb{Z}), \mathcal{T}_n(SO)).$$

Wir kommen nun zur Bestimmung von  $NS_n(D^1 \times M; \overline{\mathcal{V}}_1)$ .

Wegen der Voraussetzungen an  $M$  ist  $S(D^1 \times M)$  für  $n \neq 6$  minimal.

Für  $n \equiv 1 \pmod{2}$  folgt das unmittelbar aus Hilfssatz 3.9.

Für  $n \equiv 0 \pmod{2}$ ,  $n \neq 6$ , folgt wegen  $v_{n+2}(M) = 0$ , daß

$\mu: \mathcal{T}_{n+1}(D^1 \times M) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$  über die Homologie faktorisiert (Vgl. Beweis von Hilfssatz 3.9).

Aus  $\mu(\alpha + \alpha') = \mu(\alpha) + \mu(\alpha') + \lambda(\alpha, \alpha')$  und dem Verschwinden der Schnittform  $\lambda$  aus  $D^1 \times M$  folgt mit der geforderten Eigenschaft (E), daß  $\mu$  auf  $\mathcal{T}_{n+1}(D^1 \times M)$  verschwindet. Also ist auch in diesem Fall  $S(D^1 \times M)$  minimal.

Aus Satz 3.7 folgt jetzt wegen  $L_{2n+3}(e) = \{0\}$

$NS_n(D^1_{\times M}; \mathcal{V}_1) = \text{Kern } \Theta : \mathcal{G}_{2n+2}^{<n+2>}(K_n) \longrightarrow L_{2n+2}(e)$   
 $= \mathcal{G}_{2n+2}^{<n+2>}(K_n)$ . Damit ist die Sequenz  
 $\pi_1(SO) \xrightarrow{\hat{\alpha}_1} \mathcal{G}_{2n+2}^{<n+2>}(K_n) \xrightarrow{\hat{\beta}_1} \pi_0 S \text{ Diff}(M) \xrightarrow{SX} \text{Hom}(H_n(M; \mathbb{Z}), \pi_n(SO))$   
 hergeleitet.

Ist  $n \equiv 3, 4 \pmod{8}$ , so ist  $\pi_{n+3}(BO) = 0$  und  $\pi_{n+2}(BO) = 0$ .

Aus Hilfssatz 7.1.ii) folgt dann  $\pi_{2n+3}(K_n \wedge bo^{<n+2>}) = 0$ ,

und aus Hilfssatz 7.1.i)  $\pi_{2n+2}^s(K_n) \cong \pi_{2n+2}(K_n \wedge MO^{<n+2>})$

$\cong \mathcal{G}_{2n+2}^{<n+2>}(K_n)$ ,

also  $\mathcal{G}_{2n+2}^{<n+2>}(K_n) = \pi_{2n+2}^s(K_n) \oplus \mathcal{G}_{2n+2}^{<n+2>} = \pi_{2n+2}^s(K_n) \oplus \Theta_{2n+2}$ .

Ist  $n \equiv 0, 2 \pmod{8}$  und  $\pi_n(M)$  zusätzlich torsionsfrei, so ist

$\pi_{n+3}(BO) = 0$  und  $H_{n+1}(K_n; \pi_{n+2}(BO)) = 0$ . Aus 7.1.ii) folgt

$\pi_{2n+3}(K_n \wedge bo^{<n+2>}) = 0$  und aus 7.1.i) ergibt sich in diesem

Fall die exakte Sequenz

$$\begin{aligned}
 0 &\longrightarrow \pi_{2n+2}^s(K_n) \longrightarrow \pi_{2n+2}(K_n \wedge MO^{<n+2>}) \longrightarrow H_n(K_n; \pi_{n+2}(BO)) \\
 &\longrightarrow \pi_{2n+1}^s(K_n) \longrightarrow \pi_{2n+1}(K_n \wedge MO^{<n+2>}) \longrightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Aus den Hilfssätzen 7.2 und 7.4 folgt im torsionsfreien

Fall die Injektivität der Abbildung  $\pi_{2n+1}^s(K_n) \longrightarrow \pi_{2n+1}(K_n \wedge MO^{<n+2>})$ .

Zusammen mit  $\mathcal{G}_{2n+2}^{<n+2>}(K_n) \cong \Theta_{2n+2} \oplus \mathcal{G}_{2n+1}^{<n+2>}(K_n)$

$$= \Theta_{2n+2} \oplus \pi_{2n+2}(K_n \wedge MO^{<n+2>})$$

ist damit alles bewiesen.

q.e.d.

### Bemerkung:

Ist  $\pi_n(M)$  torsionsfrei,  $n \neq 1 \pmod{8}$  und  $M$   $s$ -parallelisierbar, so ist

$SX: \pi_0 S \text{ Diff}(M) \longrightarrow \text{Hom}(H_n(M; \mathbb{Z}), \pi_n(SO))$  surjektiv [Ei] .

Ein Nachteil der durch Satz 7.7 gegebenen Beschreibung von  $\pi_0 \text{S Diff}(M)$  ist es, daß nicht alle Abbildungen in der exakten Sequenz für  $\pi_0 \text{S Diff}(M)$  durch geometrische Invarianten der Diffeomorphismen gegeben sind.

Ist  $\pi_n(M)$  frei, so gilt  $H_n(M; \pi_{n+2}(BO)) \cong H^{n+1}(M; \pi_{n+2}(BO))$   
 $\cong \text{Hom}(H_{n+1}(M), \pi_{n+2}(BO)) \cong \text{Hom}(H_{n+1}(M), \pi_{n+1}(SO)).$

Dieser Anteil von  $\hat{\Omega}_{2n+2}^{<n+2>}(K_n)$  entspricht vermutlich den stabilisierten Twistinvarianten auf  $(n+1)$ -dimensionalen Sphären in  $M$ , während durch  $\pi_{2n+2}^S(K_n)$  die instabilen Twistinvarianten beschrieben werden.

## § 8 Bordismus und Pseudobordismus von Faserbündeln über Sphären

In diesem Kapitel werden die Bordismusgruppen, bzw. die Pseudobordismusgruppen von Faserbündeln über Sphären eingeführt. Wir konstruieren für einige dieser Gruppen Bordismusinvarianten und zeigen damit, daß die offensichtlichen Invarianten im allgemeinen nicht ausreichen werden, um eine Faserbündelbordismusklass zu bestimmen.

Die Untersuchung der Bordismusgruppen von Faserbündeln über Sphären führt auf ein Fortsetzungsproblem für Diffeomorphismen. Die bisher benutzten Methoden sollen im letzten Teil dieses Kapitels zur Herleitung eines hinreichenden Kriteriums zur Lösung solch eines Fortsetzungsproblems angewendet werden.

### A) Bordismusgruppen von Faserbündeln

#### Definition 8.1:

Seien  $M$ ,  $M'$  und  $X$  orientierte kompakte Mannigfaltigkeiten.

$M$  und  $M'$  seien  $n$ -dimensional.

Zwei differenzierbare Faserbündel

$(M \rightarrow E \xrightarrow{p} X)$  und  $(M' \rightarrow E' \xrightarrow{p'} X)$  heißen bordant, wenn es eine

orientierte Mannigfaltigkeit  $N$  mit  $\partial N = M + (-M')$  gibt,

sowie ein differenzierbares Faserbündel  $(N \rightarrow \bar{E} \xrightarrow{\bar{p}} X)$  mit

$\partial \bar{E} = E + (-E')$  und  $\bar{p}|_{\partial \bar{E}} = p + p'$ . (Die Strukturgruppe der Bündel

ist jeweils die volle Diffeomorphismengruppe der Faser.)

"Bordismus von Faserbündeln" liefert eine Äquivalenzrelation

(Siehe [Di]). Die Menge der Äquivalenzklassen bildet bezüglich

disjunkter Vereinigung eine Gruppe, die mit  $F_n(X)$  bezeichnet

werden soll.

Bemerkung 8.2:

Die Definition der Bordismusgruppe  $F_n(X)$  kann für den Fall verallgemeinert werden, daß  $X$  ein endlicher CW-Komplex ist. Ist  $X$  ein endlicher CW-Komplex und  $X \subset \mathbb{R}^t$  eine Einbettung, so sei  $N(X)$  eine offene reguläre Umgebung von  $X$ . Ein Faserbündel  $M \rightarrow E \xrightarrow{p} X$  heißt differenzierbar, wenn es sich zu einem differenzierbaren Faserbündel auf eine reguläre Umgebung  $N(X)$  fortsetzen läßt. Die Bordismusrelation verallgemeinert sich entsprechend.

Die Gruppen  $F_n(X)$  konnten bisher nur in sehr wenigen Fällen berechnet werden. Für  $X = S^1$  stimmt  $F_n(X)$  mit der Bordismusgruppe von Diffeomorphismen  $\Delta_n$  überein (Vgl. § 9, bzw.  $[Kr_2]$ ).

Diese Gruppen sind in  $[Kr_2]$  für  $n \geq 3$  bestimmt worden.  $F_3(S^1)$  ist zuerst von P. Melvin berechnet worden  $[Me]$  und  $F_2(S^1)$  von F. Bonahon  $[Bon]$ .

Ferner ist bekannt, daß für eine beliebige Mannigfaltigkeit  $X$   $F_1(X) = 0$  gilt und für eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit  $X$   $F_2(X)$  ebenfalls null ist  $[Di]$ .

Für den Fall, daß  $X$  eine Fläche oder eine Sphäre ist, gibt es außer diesen Berechnungen noch Untersuchungen über das Bild von

$$F_n(X) \longrightarrow \Omega_{n+\dim X}, \quad (M \rightarrow E \rightarrow X) \longmapsto [E].$$

(Siehe  $[Al, Ka]$ )

Wir beschäftigen uns nun mit dem Fall, daß  $X$  eine  $i$ -dimensionale Sphäre ist,  $i \geq 2$ .

Die differenzierbaren Faserbündel  $E \xrightarrow{p} S^i$  mit Faser  $M$  werden bis auf Isomorphie durch  $\pi_{i-1}(\text{Diff}(M), \{Id\}) / \pi_0 \text{Diff}(M)$  klassifiziert, wobei  $\pi_0 \text{Diff}(M)$  auf  $\pi_{i-1}(\text{Diff}(M), Id)$  durch Konjugation operiert.

Wir repräsentieren die Elemente  $\alpha$  in  $\pi_{i-1}(\text{Diff}(M), \{Id\})$  so, daß  $\alpha(t) = Id$  für alle  $t \in D_-^{i-1}$ .  $\alpha: S^{i-1} \hookrightarrow \text{Diff}(M)$  liefert dann einen Diffeomorphismus  $f_\alpha: S^{i-1} \times M \longrightarrow S^{i-1} \times M$

$$(t, x) \longmapsto (t, \alpha(t)(x))$$

mit  $f_\alpha|_{D_-^{i-1} \times M} = Id$ .

Zwei Diffeomorphismen  $f: S^{i-1} \times M \longrightarrow S^{i-1} \times M$  und  $f': S^{i-1} \times M' \longrightarrow S^{i-1} \times M'$  heißen äquivalent, wenn es einen Diffeomorphismus  $g: M \rightarrow M'$  gibt, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^{i-1} \times M & \xrightarrow{f} & S^{i-1} \times M \\ \text{Id} \times g \downarrow & & \downarrow \text{Id} \times g \\ S^{i-1} \times M' & \xrightarrow{f'} & S^{i-1} \times M' \end{array}$$

kommutiert. Die Äquivalenzklasse von  $f$  bezeichnen wir mit  $(S^{i-1} \times M, f)$  (Siehe [Kr<sub>2</sub>, §1]).

Man erhält unmittelbar folgenden Hilfssatz.

### Hilfssatz 8.3:

Zwei Faserbündel  $(M \rightarrow E \rightarrow S^i)$  und  $(M' \rightarrow E' \rightarrow S^i)$ , klassifiziert durch  $[\alpha] \in \pi_{i-1}(\text{Diff}(M), \{Id\}) / \pi_0 \text{Diff}(M)$ , bzw.  $[\alpha'] \in \pi_{i-1}(\text{Diff}(M'), \{Id\}) / \pi_0 \text{Diff}(M')$ , sind genau dann bordant, wenn es eine Mannigfaltigkeit  $N$  mit  $\partial N = M + (-M')$  gibt, sowie einen Diffeomorphismus  $F: S^{i-1} \times N \longrightarrow S^{i-1} \times N$  mit  $\partial(S^{i-1} \times N, F) = (S^{i-1} \times M, f_\alpha) + (S^{i-1} \times (-M'), f_{\alpha'})$  und  $F|_{D_-^{i-1} \times N} = Id$ , der mit der Projektion auf  $S^{i-1}$  kommutiert.

Beweis:

Sei  $(N \rightarrow \bar{E} \rightarrow S^i)$  ein Bündel mit  $\partial(N \rightarrow \bar{E} \rightarrow S^i) = (M \rightarrow E \rightarrow S^i) + (-M' \rightarrow -E' \rightarrow S^i)$ .  $\bar{E} \rightarrow S^i$  werde durch  $F_{\alpha} : S^{i-1} \times N \rightarrow S^{i-1} \times N$

klassifiziert. Da  $F_{\alpha}|_{S^{i-1} \times M} : E \rightarrow S^i$  klassifiziert, sind  $(S^{i-1} \times M, F_{\alpha}|_{S^{i-1} \times M})$  und  $(S^{i-1} \times M, f_{\alpha})$  äquivalent. Das gleiche gilt für  $(S^{i-1} \times (-M'), F_{\alpha}|_{S^{i-1} \times (-M')})$  und  $(S^{i-1} \times (-M'), f_{\alpha'})$ .

Also folgt  $\partial(S^{i-1} \times N, F_{\alpha}) = (S^{i-1} \times M, F_{\alpha}|_{S^{i-1} \times M}) + (S^{i-1} \times (-M'), F_{\alpha}|_{S^{i-1} \times (-M')}) = (S^{i-1} \times M, f_{\alpha}) + (S^{i-1} \times (-M'), f_{\alpha'})$ .

Außerdem kommutiert  $F_{\alpha}$  mit der Projektion auf  $S^{i-1}$ .

Ist umgekehrt  $F : S^{i-1} \times N \rightarrow S^{i-1} \times N$  ein mit der Projektion auf  $S^{i-1}$  verträglicher Diffeomorphismus mit

$\partial(S^{i-1} \times N, F) = (S^{i-1} \times M, f_{\alpha}) + (S^{i-1} \times (-M'), f_{\alpha'})$  gegeben, so ist

$$N \longrightarrow N(F) = D_{+}^{i \times N} \cup_F D_{-}^{i \times N} \xrightarrow{p_{0i} \cup p_{0i}} S^i \text{ ein Faserbündel}$$

mit  $\partial(N \rightarrow N(F) \rightarrow S^i) = (M \rightarrow M(f_{\alpha}) \rightarrow S^i) + (-M' \rightarrow -M'(f_{\alpha'}) \rightarrow S^i) = (M \rightarrow E \rightarrow S^i) + (-M' \rightarrow -E' \rightarrow S^i)$ .

q.e.d.

Hilfssatz 8.3 führt dazu, die Fortsetzbarkeit von  $f_{\alpha} + f_{\alpha'}$  als abgeschwächtes Problem für Blockdiffeomorphismen zu stellen.

Definition 8.4:

Seien  $(S^{i-1} \times M, f)$  und  $(S^{i-1} \times M', f')$  zwei Diffeomorphismen, wobei  $[f] \in \widetilde{\Pi}_{i-1} \text{Diff}(M)$  und  $[f'] \in \widetilde{\Pi}_{i-1} \text{Diff}(M')$ .

$f$  und  $f'$  heißen bordant, wenn es eine orientierte Mannigfaltigkeit  $N$  mit  $\partial N = M + (-M')$  gibt,

sowie einen Diffeomorphismus  $F : S^{i-1} \times N \rightarrow S^{i-1} \times N$

mit  $F|_{D_{+}^{i \times N}} = \text{Id}$ , so daß  $\partial(S^{i-1} \times N, F) = (S^{i-1} \times M, f) + (S^{i-1} \times (-M'), f')$ .

Die Gruppe der Pseudobordismusklassen wird mit  $\psi_{F_N}(S^i)$  bezeichnet.

## B) Algebraische Vorbereitungen zur Definition von Bordismus-invarianten

Sei  $G$  eine abelsche Gruppe und  $r$  eine natürliche Zahl.

Wir betrachten Tripel  $(V, s, \varphi)$ . Dabei ist  $V$  eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe,  $s: V \times V \rightarrow \mathbb{Z}$  eine unimodulare  $(-1)^n$ -symmetrische Bilinearform und  $\varphi: V^r \rightarrow G$  eine  $(-1)^n$ -symmetrische multilineare Abbildung nach  $G$ .

Die Summe zweier solcher Tripel wird durch die orthogonale direkte Summe definiert:

$$(V, s, \varphi) + (V', s', \varphi') = (V \oplus V', s \oplus s', \varphi \oplus \varphi').$$

### Definition 8.5:

a)  $(V, s, \varphi)$  heißt metabolisch, wenn es eine Untergruppe  $U \subset V$  mit  $\text{rg } U = \frac{1}{2} \text{rg } V$  und  $U = U^\perp$  gibt, so daß  $\varphi|_{U \times U \times \dots \times U}$  identisch null ist.

b)  $(V, s, \varphi)$  und  $(V', s', \varphi')$  heißen bordant, wenn  $(V, s, \varphi) + (V', -s', -\varphi')$  metabolisch ist.

### Hilfssatz 8.6:

Die unter 8.5.b) eingeführte Relation ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Isomorphieklassen von Tripeln  $(V, s, \varphi)$ , die mit der Addition verträglich ist.

Die Menge der Äquivalenzklassen ist eine abelsche Gruppe.

Sie wird mit  $W_{(-1)^n}^r(G)$  bezeichnet.

### Beweis:

Der Beweis ergibt sich ohne Schwierigkeiten ähnlich wie für Wittgruppen von Isometrien [Neu] .

Die Relation ist reflexiv, denn  $\{ (x,x) \mid x \in V \} \subset V \oplus V$  ist ein metabolischer Unterraum in  $(V,s,\varphi) + (V,-s,-\varphi)$ .

Ist  $U$  ein metabolischer Unterraum von  $(V,s,\varphi) + (V',-s',-\varphi')$ , so ist  $T(U)$  ein metabolischer Unterraum von  $(V',s',\varphi') + (V,-s,-\varphi)$ , wobei  $T: V \oplus V' \longrightarrow V' \oplus V$  die Vertauschung ist, d.h. die Relation ist symmetrisch.

Sei  $U$  metabolischer Unterraum von  $(V,s,\varphi) + (V',-s',-\varphi')$  und  $U'$  solch ein Unterraum von  $(V',s',\varphi') + (V'',-s'',-\varphi'')$ .

$U$  und  $U'$  liefern einen metabolischen Unterraum von

$(V,s,\varphi) + (V'',-s'',-\varphi'') + (V',-s',-\varphi') + (V',s',\varphi')$ ,  
und  $(V',-s',-\varphi') + (V',s',\varphi')$  ist metabolisch. Die Transitivität ergibt sich dann aus Hilfssatz 8.7..

Die Verträglichkeit der Relation mit der Addition ist klar, ebenso die Assoziativität. Die metabolischen Tripel repräsentieren das neutrale Element, und  $[V,-s,-\varphi]$  ist das Inverse zu  $[V,s,\varphi]$ . Also ist  $\mathcal{W}_{(0,0)}^r(G)$  eine Gruppe.

q.e.d.

#### Hilfssatz 8.7:

Sind  $(V,s,\varphi) + (V',s',\varphi')$  und  $(V',s',\varphi')$  metabolisch,, so ist bereits  $(V,s,\varphi)$  metabolisch.

#### Beweis:

Sei  $U$  metabolischer Unterraum von  $(V,s,\varphi) + (V',s',\varphi')$  und  $U'$  metabolischer Unterraum von  $(V',s',\varphi')$ . Dann ist  $\bar{U} = \text{pr}_V((V \oplus U') \cap U)$  ein Unterraum in  $V$  mit  $\bar{U} = \bar{U}^\perp$  ( $\text{pr}_V: V \oplus V' \rightarrow V$  Projektion auf  $V$ ):

Aus [Neu, Lemma 2.1] folgt  $\text{rg } \bar{U} = \frac{1}{2} \text{rg } V$  und  $\bar{U} \subset \bar{U}^\perp$ .

Wir zeigen zunächst  $\bar{U}^\perp \subset \bar{U}$ .

Sei  $x \in \bar{U}^\perp$  und  $y \in \bar{U}$  ein beliebiges Element. Es gilt  $s(x, y) = 0$ .

Wegen  $y \in \bar{U}$  gibt es  $z \in U'$  mit  $(y, z) \in U$ , und es folgt

$$(s \oplus s')((x, z), (y, z)) = s(x, y) + s'(z, z) = 0, \text{ also } (x, z) \in U^\perp.$$

Wegen  $U^\perp = U$  folgt  $(x, z) \in U$  und wegen  $z \in U'$   $x \in \bar{U}$ , womit

$\bar{U}^\perp \subset \bar{U}$  gezeigt ist.

Seien nun  $x_1, \dots, x_r$  beliebige Elemente in  $\bar{U}$ . Dann gibt es

$y_1, \dots, y_r$  in  $U'$  mit  $(x_i, y_i) \in U$  für  $i=1, \dots, r$ . Aus

$$\begin{aligned} 0 &= (\varphi \oplus \varphi')((x_1, y_1), \dots, (x_r, y_r)) = \varphi(x_1, \dots, x_r) + \varphi'(y_1, \dots, y_r) \\ &= \varphi(x_1, \dots, x_r) \text{ folgt, da } \varphi \text{ auf } \bar{U} \text{ verschwindet.} \end{aligned}$$

q.e.d.

Folgender Hilfssatz erlaubt es im symmetrischen Fall, nichttriviale Elemente in  $W_+^r(\mathbb{Z})$  zu entdecken.

#### Hilfssatz 8.8:

Ist  $r$  eine Primzahl, so gibt es Homomorphismen

$$\pi: W_+^r(\mathbb{Z}) \longrightarrow W_+^1(\mathbb{Z}_r)$$

$$(\text{sign}, \lambda): W_+^1(\mathbb{Z}_r) \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_r.$$

Die Komposition  $(\text{sign}, \lambda) \circ \pi$  ist surjektiv.

#### Beweis:

Wir definieren zunächst die Abbildung  $\pi$ .

$(V, s, \varphi)$  repräsentiere ein Element in  $W_+^r(\mathbb{Z})$ . Definiere

$\bar{\varphi}: V \longrightarrow \mathbb{Z}_r$  durch  $\bar{\varphi}(v) = \varphi(v, \dots, v) \bmod r$ . Da  $\varphi$  multilinear und symmetrisch ist, gilt

$$\varphi(v+w, \dots, v+w) = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \varphi(\underbrace{v, \dots, v}_{i \text{-mal}}, w, \dots, w).$$

Ist  $r$  eine Primzahl, so gilt  $\binom{r}{i} \equiv 0 \bmod r$  für  $i = 1, \dots, r-1$ ,

also  $\varphi(v+w, \dots, v+w) \equiv \varphi(v, \dots, v) + \varphi(w, \dots, w) \bmod r$ .

Damit ist gezeigt, daß  $\overline{\varphi}: V \longrightarrow \mathbb{Z}_r$  ein Homomorphismus ist, und wir können  $\overline{\pi}$  durch  $\overline{\pi} [V, s, \varphi] = [V, s, \overline{\varphi}]$  definieren. Offensichtlich ist  $\overline{\pi}$  wohldefiniert und ein Homomorphismus.

Wir kommen nun zur Definition von  $\lambda: W_+^1(\mathbb{Z}_r) \longrightarrow \mathbb{Z}_r$ .

$(V, s, \overline{\varphi})$  repräsentiere ein Element in  $W_+^1(\mathbb{Z}_r)$ . Da  $V$  eine freie abelsche Gruppe ist, gibt es einen Homomorphismus  $\varphi: V \longrightarrow \mathbb{Z}$  mit  $\overline{\varphi}(v) = \varphi(v) \bmod r$ . Da  $s$  unimodular, ist die Adjungierte  $\overline{s}: V \longrightarrow V^*$  ein Isomorphismus.

Definiere  $\lambda$  durch  $\lambda [V, s, \overline{\varphi}] = \overline{\varphi}(\overline{s}^{-1}(\varphi))$ ,

d.h. ist  $v_\varphi \in V$  ein Element mit  $\varphi(v) = s(v_\varphi, v)$  für alle  $v \in V$ , so sei  $\lambda [V, s, \overline{\varphi}] = s(v_\varphi, v_\varphi) \bmod r$ .

Der Wert von  $\lambda$  hängt nicht von der Wahl von  $\varphi$  ab.

Ist  $\varphi'$  ein weiterer Homomorphismus mit  $\overline{\varphi}(v) = \varphi'(v) \bmod r$ , so gilt  $\varphi - \varphi' = r\tilde{\varphi}$  für geeignetes  $\tilde{\varphi} \in V^*$ , also

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}(\overline{s}^{-1}(\varphi)) &= \overline{\varphi}(\overline{s}^{-1}(\varphi' + r\tilde{\varphi})) = \overline{\varphi}(\overline{s}^{-1}(\varphi')) + \overline{s}^{-1}(r\tilde{\varphi}) \\ &= \overline{\varphi}(\overline{s}^{-1}(\varphi')) + r\overline{\varphi}(\overline{s}^{-1}(\tilde{\varphi})) = \overline{\varphi}(\overline{s}^{-1}(\varphi')). \end{aligned}$$

Wir zeigen, daß  $\lambda$  auf metabolischen Tripeln  $(V, s, \overline{\varphi})$  verschwindet.

Sei  $U \subset V$  ein metabolischer Unterraum für  $(V, s, \overline{\varphi})$ .

$U$  ist ein direkter Summand in  $V$ . Also können wir einen Homomorphismus  $\varphi: V \longrightarrow \mathbb{Z}$  wählen, so daß  $\overline{\varphi}(v) = \varphi(v) \bmod r$  und  $\varphi|_U \equiv 0$ . Dann liegt  $v_\varphi = \overline{s}^{-1}(\varphi)$  in  $U$ , d.h.  $\overline{\varphi}(\overline{s}^{-1}(\varphi)) = 0$ . Angenommen, das wäre nicht der Fall. Dann gibt es  $u \in U$  mit  $s(v_\varphi, u) \neq 0$ . Für alle  $v \in V$  gilt aber  $\varphi(v) = s(v_\varphi, v)$ , also  $\varphi(u) \neq 0$  im Widerspruch zu  $\varphi|_U \equiv 0$ .

Es folgt, daß  $\lambda$  ein wohldefinierter Homomorphismus ist.

Sei  $\bar{\varphi}_n: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_r$  der Homomorphismus mit  $\bar{\varphi}_n(1) = n \bmod r$ .

Mit  $\langle 1 \rangle$  soll die symmetrische Form  $s: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$  mit  $s(1,1) = 1$  bezeichnet werden.

Mit  $\text{sign}(V,s)$  soll die Signatur der symmetrischen Bilinearform  $s$  bezeichnet werden.

Dann gilt

$$(i) \quad (\text{sign}, \lambda) ([\mathbb{Z}, \langle 1 \rangle, \bar{\varphi}_0]) = (1, 0)$$

$$(ii) \quad (\text{sign}, \lambda) ([\mathbb{Z}, \langle 1 \rangle, \bar{\varphi}_1]) = (1, \bar{1}).$$

(i) ist klar, da  $\bar{\varphi}_0$  die Null-Abbildung ist.

Zu (ii):  $\text{Id}_{\mathbb{Z}}$  ist eine Abbildung mit  $\text{Id}_{\mathbb{Z}}(x) \bmod r = \bar{\varphi}_1(x)$ .

Es gilt  $\tilde{s}^{-1}(\text{Id}_{\mathbb{Z}}) = 1$ , also  $\lambda [\mathbb{Z}, \langle 1 \rangle, \bar{\varphi}_1] = \bar{\varphi}_1(1) = \bar{1}$ .

Sei  $\varphi_n: \mathbb{Z}^r \longrightarrow \mathbb{Z}$  die symmetrische multilineare Abbildung, die durch  $\varphi_n(1,1,\dots,1) = n$  gegeben ist.

Dann gilt  $\mathcal{N}[\mathbb{Z}, \langle 1 \rangle, \varphi_0] = [\mathbb{Z}, \langle 1 \rangle, \bar{\varphi}_0]$  und  $\mathcal{N}[\mathbb{Z}, \langle 1 \rangle, \varphi_1] = [\mathbb{Z}, \langle 1 \rangle, \bar{\varphi}_1]$ .

Da  $(1,0)$  und  $(1,\bar{1}) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_r$  die Gruppe  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_r$  erzeugen, folgt die Surjektivität von  $(\text{sign}, \lambda) \circ \mathcal{N}$ .

q.e.d.

C) Bordismusinvarianten für Faserbündel mit 2n-dimensionaler Faser über  $S^{2n}$  und  $S^{3n}$

Wir definieren zunächst für  $r=2$  und  $r=3$  eine Bordismusinvariante

$$\phi : F_{2n}(S^{rn}) \longrightarrow W_{(-1)^n}^{r+2}(\mathbb{Z}).$$

Sei  $M^{2n} \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} S^{rn}$  ein Faserbündel. Das Cup-Produkt auf  $H^n(M) = H^n(M; \mathbb{Z})$  (Kohomologie und Homologie ab jetzt stets mit  $\mathbb{Z}$ -Koeffizienten)

liefert eine unimodulare  $(-1)^n$ -symmetrische Bilinearform  $s_\cup$  auf  $H^n(M)/\text{Torsion}$ .

Aus der Wang-Sequenz von  $E$  folgt, daß

$$H^n(E) \xrightarrow{i^*} H^n(M) \text{ ein Isomorphismus ist.}$$

Sei  $\varphi_E : (H^n(M)/\text{Tors})^{r+2} \longrightarrow \mathbb{Z}$  gegeben durch

$$(x_1, \dots, x_{r+2}) \longmapsto \left\langle \prod_{i=1}^{r+2} i^{*-1}(x_i), [E] \right\rangle.$$

Satz 8.9: Sei  $r=2$  oder  $r=3$ .

Die Äquivalenzklasse von  $\left[ H^n(M)/\text{Tors}, s_\cup, \varphi_E \right]$  in  $W_{(-1)^n}^{r+2}(\mathbb{Z})$  hängt nur von der Bordismuskasse des Faserbündels

$M \rightarrow E \rightarrow S^{rn}$  ab und liefert einen Gruppenhomomorphismus

$$\phi : F_{2n}(S^{rn}) \longrightarrow W_{(-1)^n}^{r+2}(\mathbb{Z}).$$

Beweis:

Sei  $N$  eine Mannigfaltigkeit mit  $\partial N = M$  und  $N \xrightarrow{I} \bar{E} \xrightarrow{p} S^{rn}$  ein Faserbündel, das  $M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} S^{rn}$  berandet.

Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^n(E) & \xrightarrow[\cong]{i^*} & H^n(M) \\ \uparrow j^* & & \uparrow j^* \\ H^n(\bar{E}) & \xrightarrow[\cong]{I^*} & H^n(N) \end{array}$$

folgt, daß  $\varphi_E$  auf Bild  $j^*/\text{Tors}$  verschwindet:

Ist für  $i=1, \dots, r+2$   $x_i \in \text{Bild } j^*$ , so gibt es  $\bar{x}_i \in H^n(\bar{E})$

mit  $J^*(\bar{x}_i) = i^{*-1}(x_i)$  und es gilt

$$\begin{aligned} \varphi_E(x_1, \dots, x_{r+2}) &= \left\langle \prod_{i=1}^{r+2} i^{*-1}(x_i), [E] \right\rangle = \left\langle \prod_{i=1}^{r+2} J^*(\bar{x}_i), [E] \right\rangle \\ &= \left\langle \prod_{i=1}^{r+2} \bar{x}_i, J_* \partial [E] \right\rangle = 0, \text{ da } J_* \partial = 0 \end{aligned}$$

( $[\bar{E}] \in H_{(r+2)n+1}(\bar{E}, E)$ : Fundamentalklasse).

Bild  $j^*$  ist ein Unterraum von halbem Rang in  $H^n(M)$ , auf dem die Cup-Produktform verschwindet.

Da  $s_u$  und  $\varphi_E$   $\mathbb{Z}$ -wertig sind, verschwinden  $s_u$  und  $\varphi_E$  auch auf dem von Bild  $j^*$  erzeugten direkten Summanden. Daraus folgt, daß  $(H^n(M)/\text{Tors}, s_u, \varphi_E)$  metabolisch ist.

Also ist  $\phi$  wohldefiniert. Die Homomorphieeigenschaft von  $\phi$  ist klar.

q.e.d.

Der Kern von  $F_m(S^t) \rightarrow \Omega_m \oplus \Omega_{m+t}$ ,  $(M \rightarrow E \rightarrow S^t) \mapsto ([M], [E])$  wird im folgenden mit  $\tilde{F}_m(S^t)$  bezeichnet.

Wir wollen die Invariante  $\phi$  benutzen, um zu zeigen, daß dieser Kern nichttrivial sein kann.

Gilt  $\dim(M) \geq 0$  (4) und  $\dim(E) \equiv 0$  (4), so werden im allgemeinen Relationen zwischen den Pontrjaginzahlen von  $E$  und der Invariante  $\phi(E)$  bestehen. Wir beschränken uns deshalb hier auf ein Beispiel mit  $\dim(E) \not\equiv 0$  (4).

Es gibt ein komplex 3-dimensionales Vektorraumbündel  $\omega$  über  $S^6$  mit  $\langle c_3(\omega), [S^6] \rangle = 2$ .

Das folgt aus den Eigenschaften des Chern-Charakters (Siehe z.B. [Hi]), zusammen mit der Isomorphie

$$\pi_5(U(3)) \xrightarrow{\cong} \pi_5(U).$$

Sei  $P_2\mathbb{C} \longrightarrow P(\omega) \longrightarrow S^6$  das zu  $\omega$  assoziierte komplex-projektive Bündel (Vgl. [Hu]).

Satz 8.10:

Es gilt  $\phi(P(\omega)) = [\mathbb{Z}, \langle 1 \rangle, \varphi_{-2}] \in W_+^5(\mathbb{Z})$ ,

wobei  $\varphi_{-2}$  durch  $\varphi_{-2}(1,1,1,1,1) = -2$  gegeben ist.

Der Homomorphismus

$$\lambda \pi \phi |_{\widetilde{F}_4(S^6)} : \widetilde{F}_4(S^6) \longrightarrow \mathbb{Z}_5$$

ist surjektiv, d.h.  $\widetilde{F}_4(S^6)$  ist nichttrivial.

Beweis:

Sei  $\lambda \longrightarrow P(\omega)$  das Hopf-Bündel über  $P(\omega)$ .  $c_1(\lambda)$  ist ein Erzeuger von  $H^2(P(\omega))$ , so daß  $c_1(\lambda)|_{P_2\mathbb{C}} = a \in H^2(P_2\mathbb{C})$

$H^2(P_2\mathbb{C})$  erzeugt. Dann gilt  $\varphi_{P(\omega)}(a, a, a, a, a) = \langle c_1(\lambda)^5, [P(\omega)] \rangle$ .

Für  $c_1(\lambda)$  gilt die multiplikative Relation

$c_1(\lambda)^3 = -p^*c_3(\omega)$  [Hu], ( $p: P(\omega) \longrightarrow S^6$  Faserbündelprojektion)  
also  $c_1(\lambda)^5 = -c_1(\lambda)^2 \cdot p^*c_3(\omega)$ .

Nach dem Satz von Leray-Hirsch ist  $c_1(\lambda)^2 \cdot p^*(\mathbb{C}^6)$  Erzeuger von  $H^{10}(P(\omega)) \cong \mathbb{Z}$ ,

und wegen  $c_3(\omega) = 2\mathbb{C}^6$  nach Wahl von  $\omega$  ergibt sich

$\langle c_1(\lambda)^2 \cdot p^*c_3(\omega), [P(\omega)] \rangle = 2$ , also  $\varphi_{P(\omega)}(a, a, a, a, a) = -2$ .

Unter der Isometrie  $(\mathbb{Z}, \langle 1 \rangle) \longrightarrow (H^2(P_2\mathbb{C}), s_u)$

$$1 \longmapsto a$$

entspricht  $\phi(P(\omega)) = [H^2(P_2\mathbb{C}), s_u, \varphi_{P(\omega)}]$  dem Element

$[\mathbb{Z}, \langle 1 \rangle, \varphi_{-2}]$  in  $W_+^5(\mathbb{Z})$ .

Für  $\lambda \pi: W_+^5(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}_5$  gilt (Vgl. Teil B)

$\lambda \pi [\mathbb{Z}, \langle 1 \rangle, \varphi_{-2}] = \lambda [\mathbb{Z}, \langle 1 \rangle, \bar{\varphi}_{-2}] = \bar{\varphi}_{-2}(\tilde{s}^{-1}(\varphi_{-2})) = \bar{\varphi}_{-2}(-\bar{2})$   
 $= \bar{4} \in \mathbb{Z}_5$ .

Da  $\mathcal{Q}_{10} = \mathbb{Z}_2$ , ist  $E = 2 (P(\omega) + S^6 x(-P_2 \mathbb{C}))$  ein Faserbündel mit nullbordantem Totalraum und nullbordanter Faser, d.h.

$E$  repräsentiert ein Element in  $\widetilde{F}_4(S^6)$ .

Ferner gilt  $\phi(S^6 x(-P_2 \mathbb{C})) = [\mathbb{Z}, \langle -1 \rangle, \varphi_0]$ , also  $\lambda \pi \phi(S^6 x(-P_2 \mathbb{C})) = 0$ .

Damit erhalten wir  $\lambda \pi \phi(E) = \lambda \pi \phi(P(\omega)) + \lambda \pi \phi(P(\omega)) = \bar{4} + \bar{4} = \bar{3} \in \mathbb{Z}_5$ , d.h.  $\lambda \pi \phi|_{\widetilde{F}_4(S^6)}$  ist surjektiv.

q.e.d.

### Bemerkung 8.11:

a) Für  $r > 3$  ist die analog wie in Satz 8.9 gegebene Invariante trivial, da dann  $H^{3n}(E)$  null ist, also bereits 3-fache Cup-Produkte verschwinden.

b) Für  $r=1$ , also Faserbündel  $M^{2n} \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} S^n$ , ist

$H^n(M) \xrightarrow{i^*} H^n(M)$  kein Isomorphismus. Es gibt die exakte

Wang-Sequenz  $H^0(M) \xrightarrow{\delta} H^n(E) \xrightarrow{i^*} H^n(M) \rightarrow H^1(M) \rightarrow$

Ist  $n \equiv 0 \pmod{2}$ ,  $H^1(M) = 0$  und  $H^n(M)$  torsionsfrei, so läßt sich ein Homomorphismus  $\bar{\varphi}_E: H^n(M) \rightarrow \mathbb{Z}_3$  wie folgt definieren:

Sei  $x \in H^n(M)$  und  $\bar{x} \in H^n(E)$  ein beliebiges Element in  $H^n(E)$

mit  $i^*(\bar{x}) = x$ . Definiere  $\bar{\varphi}_E$  durch  $\bar{\varphi}_E(x) = \langle \bar{x}^3, [E] \rangle \pmod{3}$ .

Definiert man  $\bar{\phi}(E) = [H^n(M), s_*, \bar{\varphi}_E] \in W_+^1(\mathbb{Z}_3)$ , so läßt sich folgendes zeigen:

(i) Ist  $N \rightarrow \bar{E} \rightarrow S^n$  ein Faserbündel mit

$\mathcal{D}(N \rightarrow \bar{E} \rightarrow S^n) = (M \rightarrow E \rightarrow S^n)$  und ist  $H_n(N)$  torsionsfrei, so gilt  $\bar{\phi}(E) = 0$ .

(ii)  $E_1 = 2 (P(\omega \otimes \mathbb{C}^4) + (S^6 x(-P_6 \mathbb{C})))$  und  $E_2 = P(\omega \otimes \mathbb{C}^2) + S^2 x(-P_2 \mathbb{C})$  repräsentieren Elemente in  $\widetilde{F}_{12}(S^6)$ , bzw.  $\widetilde{F}_4(S^2)$  mit

$\bar{\phi}(E_1) \neq 0$  und  $\bar{\phi}(E_2) \neq 0$ .

$(H \rightarrow S^2 \text{ Hopf-Bündel}, \omega \rightarrow S^6 \text{ wie in 8.10}, P(\eta))$  komplex-projektives

Bündel zum Vektorraumbündel  $\eta$ ,  $\eta = H\Omega\mathbb{C}^2, \omega\Omega\mathbb{C}^4$ )

Der Beweis von (ii) ist analog wie Satz 8.10.

Der Beweis von (i) ist schwieriger als der Beweis von Satz 8.9.

Da sich die Bedingung " $H_n(N)$  torsionsfrei" nicht so ohne weiteres eliminieren läßt, soll auf den Beweis nicht genauer eingegangen werden.

D) Ein hinreichendes Kriterium für die Fortsetzung von  
Blockdiffeomorphismen

Der erste Schritt bei der Behandlung der Frage, ob ein Faserbündel  $E$  nullbordant ist, ist die Untersuchung des abgeschwächten Problems, wann der klassifizierende Diffeomorphismus  $f : S^{i-1} \times M \longrightarrow S^{i-1} \times M$  pseudo-nullbordant ist. Es soll nun dargestellt werden, wie man mit Hilfe der in den ersten Kapiteln dargestellten Methoden hinreichende Bedingungen für dieses Problem gewinnen kann.

Ist  $B_k(M) \xrightarrow{p_M} BO$  der Normalen- $k$ -Typ von  $M$ , so bezeichnen wir  $\overline{\nu}_i$  nun genauer mit  $\overline{\nu}_{M,i}$ .

Sei  $N$  eine Mannigfaltigkeit mit  $\partial N = M$ ,

$B_k(N) \xrightarrow{p_N} BO$  der Normalen- $k$ -Typ von  $N$

und  $\overline{\nu}_{N,i}$  das entsprechende fest gewählte Normalen- $k$ -Smoothing auf  $D_+^i \times N$ .

Aus den allgemeinen Eigenschaften der  $k$ -Postnikov-Zerlegungen einer Abbildung, bzw. aus Hindernistheorie folgt unmittelbar, daß es zu  $i_0 \in \mathbb{N}$  eine Abbildung  $J : B_k(M) \longrightarrow B_k(N)$  gibt, so daß für  $i \leq i_0$  folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc}
 B_k(M) & \xrightarrow{J} & B_k(N) & & \\
 \uparrow \overline{\nu}_{M,i} & \searrow p_M & \swarrow p_N & & \uparrow \overline{\nu}_{N,i} \\
 & & BO & & \\
 \swarrow \gamma_{\partial M}^i & & \nwarrow \gamma_{\partial N}^i & & \\
 D_+^i \times M & \xleftarrow{\text{Id} \times i} & D_+^i \times N & & 
 \end{array}$$

Dabei ist  $J$  bis auf Faserhomotopie über  $BO$  eindeutig bestimmt.

$J$  induziert einen Homomorphismus  $J_*: \Omega_*^{B_k(M)} \longrightarrow \Omega_*^{B_k(N)}$ .

Sei  $\omega: NS_k(D^i \times M; \overline{\nu}_i) \longrightarrow \Omega_{n+i}^{B_k(N)}$  die Komposition  $\omega = J_* \circ \eta$ ,

wobei  $\eta: NS_k(D^i \times M; \overline{\nu}_i) \longrightarrow \Omega_{n+i}^{B_k(M)}$  aus der Surgery-Sequenz

für relative Normalen- $k$ -Smoothings stammt (Satz 3.7).

### Satz 8.12:

Seien  $M^n$  und  $N^{n+1}$  Mannigfaltigkeiten, so daß  $\partial N = M$ .

$M$  und  $N$  seien zusammenhängend, und  $\pi_1(N)$  sei endlich von ungerader Ordnung.

Es gelte  $n+i \equiv 0 \pmod{2}$ ,  $n+i \geq 6$ ,  $i \geq 2$  und  $k \geq \frac{n+i}{2} - 1$ .

Im Fall  $k = \frac{n+i}{2} - 1$  sei  $S(D^{i-1} \times N)$  minimal, falls  $n+i \neq 6, 14$ .

Für  $n+i = 6, 14$  und  $k = \frac{n+i}{2} - 1$  sei  $N$  1-zusammenhängend.

Ist  $\mathcal{S} \in NS_k(D^i \times M; \overline{\nu}_{M,i})$  ein relatives Normalen- $k$ -Smoothing auf  $D^i \times M$  mit  $\omega(\mathcal{S}) = 0$ , so ist  $\beta_i(\mathcal{S}) \in \pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M)$  zu einem Diffeomorphismus  $F: S^{i-1} \times N \longrightarrow S^{i-1} \times N$  mit  $F|_{D^{i-1} \times N} = \text{Id}$  fortsetzbar:

$$\begin{array}{ccc} NS_k(D^i \times M; \overline{\nu}_{M,i}) & \xrightarrow{\eta} & \Omega_{n+i}^{B_k(M)} \\ \downarrow \beta_i & \searrow \omega & \downarrow J_* \\ \pi_{i-1} \widetilde{\text{Diff}}(M) & & \Omega_{n+i}^{B_k(N)} \end{array}$$

Insbesondere ist  $\beta_i(\mathcal{S})$  pseudo-nullbordant.

### Beweis:

Sei  $\mathcal{S} \in NS_k(D^i \times M; \overline{\nu}_{M,i})$  ein Normalen- $k$ -Smoothing auf  $D^i \times M$ .

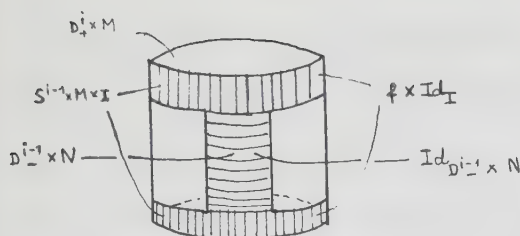
Wir können  $\mathcal{S}$  durch  $(D_+^i \times M, \overline{\nu}, f)$  repräsentieren, s.d.

$f|_{D^{i-1} \times M} = \text{Id}$ . Dann ist  $\beta_i(\mathcal{S}) = [f]$ .

Identifiziert man eine Kragenumgebung von  $S^{i-1} \times M \subset S^{i-1} \times N$

mit  $S^{i-1} \times M \times I$ , so läßt sich  $\partial(D_+^i \times N)$  in der Form

$\partial(D_+^i \times N) = (D_+^i \times M) \cup (S^{i-1} \times M \times I) \cup (D_+^{i-1} \times N \cup D_-^{i-1} \times N)$  schreiben:



$X(f) = D_+^i x N \cup_{f \times Id_I \cup Id_{D_-^{i-1} x N}} D_+^i x N$  liefert einen Bordismus zwischen

$M(f) = D_+^i x M \cup_f D_+^i x M$  und  $N\langle f \rangle = D_+^{i-1} x N \cup_{h(f)} D_-^{i-1} x N$ ,

wobei  $h(f): \partial(D_+^{i-1} x N) = D_+^{i-1} x M \cup \partial D_+^{i-1} x N \xrightarrow{\sim} \partial(D_-^{i-1} x N)$

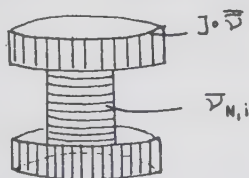
der Diffeomorphismus  $f|_{D_+^{i-1} x M \cup \partial D_+^{i-1} x N}$  ist.

Es gibt eine  $B_k(N)$ -Struktur  $\tilde{\nu}$  auf  $D_+^i x M x I \cup D_-^{i-1} x N$ , die auf

$D_+^i x M$  mit  $J_0 \bar{\nu}$  und auf  $D_-^{i-1} x N$  mit dem  $k$ -Smoothing  $\bar{\nu}_{N,i}$  übereinstimmt.

Die Wahl von  $\tilde{\nu}$  ist möglich, da wegen  $f^* \bar{\nu}_{M,i} = \bar{\nu}|_{S^{i-1} x M}$

und  $f|_{D_-^{i-1} x M} = Id \circ J_0 \bar{\nu}|_{D_-^{i-1} x M} = J_0 \bar{\nu}_{M,i}|_{D_-^{i-1} x M} = \bar{\nu}_{N,i}|_{D_-^{i-1} x M}$  gilt.



Da  $D_+^i x M x I \cup D_-^{i-1} x N$  Deformationsretrakt von  $D_+^i x N$  ist,

läßt sich  $\tilde{\nu}$  zu einer  $B_k(N)$ -Struktur  $\tilde{\nu}: D_+^i x N \rightarrow B_k(N)$  fortsetzen.

$\tilde{\nu} \cup \bar{\nu}_{N,i}$  liefert dann eine  $B_k(N)$ -Struktur auf  $X(f)$ .

Die Einschränkung dieser  $B_k(N)$ -Struktur auf  $N\langle f \rangle$  sei mit

$\bar{\nu}_{N\langle f \rangle}$  bezeichnet. Diese  $B_k(N)$ -Struktur hat die Eigen-

schaft  $\bar{\nu}_{N\langle f \rangle}|_N = \bar{\nu}_N$ .  $(X(f), \tilde{\nu})$  ist ein  $B_k(N)$ -Bordismus zwischen

$(N\langle f \rangle, \bar{\nu}_{N\langle f \rangle})$  und  $(M(f), J_0 \bar{\nu} \cup \bar{\nu}_{N,i}|_{D_+^i x M}) = J_* \gamma(D_+^i x M, \bar{\nu}, f)$ .

Die letzte Gleichung gilt, da  $J_0 \bar{\nu} \cup \bar{\nu}_{N,i}|_{D_+^i x M} = J_0 \bar{\nu} \cup J_0(-\bar{\nu}_{M,i})$

$$= J_* (\bar{\nu} - \bar{\nu}_{M,i}).$$

Da  $J_* \eta(\zeta) = \omega(\zeta) = 0$  nach Voraussetzung, ist  $(N\langle f \rangle, \bar{\nu}_{N\langle f \rangle})$   $B_k(N)$ -nullbordant. Sei  $(W, \bar{\nu}_W)$  ein  $B_k(N)$ -Bordismus mit  $\partial(W, \bar{\nu}_W) = (N\langle f \rangle, \bar{\nu}_{N\langle f \rangle})$ .

$(W, \bar{\nu}_W)$  kann als  $B_k(N)$ -Bordismus relativ Rand zwischen den typisierten  $B_k(N)$ -Mannigfaltigkeiten

$(D_+^{i-1} \times N, \bar{\nu}_{N\langle f \rangle}|_{D_+^{i-1} \times N})$  und  $(D_-^{i-1} \times N, \bar{\nu}_{N\langle f \rangle}|_{D_-^{i-1} \times N})$  aufgefaßt werden.

$(W, \bar{\nu}_W)$  ist  $B_k(N)$ -bordant zu einem  $s$ -Kobordismus, wenn das Surgery-Hindernis  $\Theta(W, \bar{\nu}_W)$  in  $L_{n+i+1}^{S, \tau}(\pi_1(N))$  verschwindet, falls  $k > \frac{n+i}{2} - 1$ ,

bzw. falls  $\Theta(W, \bar{\nu}_W)$  in  $L_{n+i+1}^{S, \tau}(\pi_1(N))$  nullbordant ist, falls  $k = \frac{n+i}{2} - 1$ .

Genauso wie bei Beweis von Satz 3.4 sieht man, daß außer

für  $n+i = 6, 14, k = \frac{n+i}{2} - 1$  mit den Bedingungen an  $i, j$  und  $k$

$\Theta(W, \bar{\nu}_W)$  bereits in  $L_{n+i+1}^S(\pi_1(N)) = 0$  liegt ( $L_{n+i+1}^S(\pi_1(N))$  ist trivial, da  $n+i+1$  ungerade und  $\pi_1(N)$  endlich von ungerader

Ordnung.) Dabei wird im Fall  $k = \frac{n+i}{2} - 1$  und  $n+i \neq 6, 14$

wieder die Minimalität von  $S(D_+^{i-1} \times N)$  verwendet, um zu zeigen, daß  $\Theta(W, \bar{\nu}_W) \in L_{n+i+1}^{S, \tau}(\pi_1(N))$  in  $L_{n+i+1}^S(\pi_1(N)) = 0$  liegt, also nullbordant ist.

Also verschwindet in diesen Fällen das Surgery-Hindernis,

d.h.  $(W, \bar{\nu}_W)$  ist  $B_k(N)$ -bordant zu einem  $s$ -Kobordismus.

Insbesondere ist  $h(f): \partial(D_+^{i-1} \times N) \rightarrow \partial(D_+^{i-1} \times N)$  zu einem

Diffeomorphismus  $\bar{h}(f): D_+^{i-1} \times N \rightarrow D_+^{i-1} \times N$  fortsetzbar.

Dann liefert  $G = \bar{h}(f) \cup \text{Id}_{D_-^{i-1} \times N}: S^{i-1} \times N \rightarrow S^{i-1} \times N$  einen

Diffeomorphismus mit  $G|_{S^{i-1} \times M} = f$  und  $G|_{D_-^{i-1} \times N} = \text{Id}$ .

Für  $k = \frac{n+i}{2} - 1$  und  $n+i = 6, 14$  verwenden wir ähnlich wie

in Satz 3.7 die stabile Klassifikation der relativen

Normalen- $k$ -Smoothings und den Kürzungssatz aus [Kr<sub>1</sub>].

Es ist nun  $N$  als 1-zusammenhängend vorausgesetzt.

Da die relativen Normalen-k-Smoothings  $(D_+^{i-1}xN, \overline{\nu}_{N\langle f \rangle}|_{D_+^{i-1}xN}, h(f))$  und  $(D_-^{i-1}xN, \overline{\nu}_{N\langle f \rangle}|_{D_-^{i-1}xN}, \text{Id})$   $B_k(N)$ -bordant sind,

gibt es  $r \in \mathbb{N}$  und einen Diffeomorphismus

$$F: D_+^{i-1}xN \# r(S^{\frac{n+i}{2}} \times S^{\frac{n+i}{2}}) \longrightarrow D_+^{i-1}xN \# r(S^{\frac{n+i}{2}} \times S^{\frac{n+i}{2}}),$$

der  $h(f)$  fortsetzt ([Kr<sub>1</sub>, Thm. 2.1]).

Die  $r$  Summanden  $S^{\frac{n+i}{2}} \times S^{\frac{n+i}{2}}$  lassen sich wegkürzen, d.h. es gibt einen Diffeomorphismus  $\overline{h}(f): D_+^{i-1}xN \longrightarrow D_+^{i-1}xN$  mit

$\overline{h}(f)|_{\partial(D_+^{i-1}xN)} = h(f)$ , wenn das Kürzungshindernis  $\mathcal{N}(F)$  eine Isometrie der Schnittform ist ([Kr<sub>1</sub>, Thm. 3.1]).

Das ist der Fall, da wegen  $i \geq 2$  die Schnittform auf  $D^{i-1}xN$  verschwindet ([Kr<sub>1</sub>, Prop.3.2]).

$G = \overline{h}(f) \cup \text{Id}_{D_-^{i-1}xN}$  ist dann wieder ein Diffeomorphismus auf  $S^{i-1}xN$ , der  $f$  fortsetzt.

q.e.d.

#### Bemerkung 8.13:

Satz 8.12 läßt sich für den Fall  $n+i \equiv 1 \pmod{2}$ , bzw. für beliebiges  $\pi_1(N)$  verallgemeinern.

Ist  $\zeta \in \text{NS}_k(D^i x M; \overline{\nu}_{M,i})$  mit  $\omega(\zeta) = 0$ , so läßt sich ein

Surgery-Hindernis  $\Theta(\zeta) \in L_{n+i+1}^S(\pi_1(N))/U_N$  definieren,

wobei  $U_N$  eine gewisse Unbestimmtheit ist.

Gilt  $\omega(\zeta) = 0$  und  $\Theta(\zeta) = 0$ , so ist  $\beta_i(\zeta)$  auf  $S^{i-1}xN$  fortsetzbar.

Das folgt unmittelbar aus dem Beweis von Satz 8.12. Auf die Einzelheiten soll nicht weiter eingegangen werden.

Wir wollen nun mit Hilfe von Satz 8.12 ein hinreichendes Kriterium herleiten, wann im Spin-Fall 1-zusammenhängende Bündel  $M^4 \rightarrow E \rightarrow S^2$  pseudonullbordant sind.

Satz 8.14:

Sei  $M^4 \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} S^2$  ein Faserbündel über  $S^2$  mit 4-dimensionaler Faser.

M sei 1-zusammenhängend und E eine Spin-Mannigfaltigkeit (d.h. M ist Spin-Mannigfaltigkeit und für den klassifizierenden Diffeomorphismus f von E gilt  $\chi(f) = 0$  (Vgl. H.S.5.4)).

Gibt es einen Unterraum  $U \subset H^2(E; \mathbb{Z})$ , so daß

(i)  $i^*(U)$  ein metabolischer Unterraum von  $(H^2(M; \mathbb{Z}), s_u)$  ist,

(ii) für beliebige Elemente  $x, y, z \in U$   $\langle x \vee y \vee z, [E] \rangle = 0$  und

(iii) für beliebiges  $x \in U$   $\langle x \vee p_1(E), [E] \rangle = 0$  gilt,

so ist  $M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} S^2$  pseudonullbordant,

d.h. der klassifizierende Diffeomorphismus von E

läßt sich zu einem Diffeomorphismus  $F: S^1 \times N \rightarrow S^1 \times N$  mit

$F|_{D^1 \times M} = \text{Id}$  fortsetzen, wobei N eine Mannigfaltigkeit mit

$\partial N = M$  ist.

Dabei kann N als 1-zusammenhängende Spin-Mannigfaltigkeit gewählt werden.

Beweis:

Wegen der Bedingung (i) ist die Signatur von M null.

Also gibt es eine Spin-Mannigfaltigkeit N mit  $\partial N = M$ .

Durch Surgery läßt sich N 1-zusammenhängend machen.

Wir nehmen zunächst einmal an, daß wir N so wählen

können, daß  $H_2(N; \mathbb{Z})$  torsionsfrei ist und daß der zu

$i^*(U)$  poincaré-duale Unterraum  $U' \subset H_2(M; \mathbb{Z})$  unter  $j_*: H_2(M; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(N; \mathbb{Z})$  auf null abgebildet wird (Teil a)). In Teil b) des Beweises wird gezeigt, daß diese zusätzlichen Bedingungen immer erfüllt werden können.

a) Da  $M$  und  $N$  1-zusammenhängende Spin-Mannigfaltigkeiten sind, ist der 2-Typ durch

$$K(H_2(M; \mathbb{Z}), 2) \times B \text{ Spin} \xrightarrow{P_{\text{Spin}} \circ PF_2} BO, \text{ bzw.}$$

$$K(H_2(N; \mathbb{Z}), 2) \times B \text{ Spin} \xrightarrow{P_{\text{Spin}} \circ PF_2} BO \text{ gegeben.}$$

$\bar{\nu}_M: M \longrightarrow K(H_2(M; \mathbb{Z}), 2) \times B \text{ Spin}$  sei durch  $\bar{\nu}_M = (\gamma, \tilde{\gamma}_M)$

festgelegt, wobei  $\gamma_* = \text{Id}$  auf der 2-ten Homologie gelten soll und  $\tilde{\gamma}_M$  die eindeutig bestimmte Spin-Struktur von  $M$  ist.

$\bar{\nu}_N = (\psi, \tilde{\gamma}_N)$  sei analog gegeben.

Dann erhalten wir  $J: B_2(M) \longrightarrow B_2(N)$  durch  $J = \hat{J} \times \text{Id}_{B \text{ Spin}}$

wobei  $\hat{J}: K(H_2(M; \mathbb{Z}), 2) \longrightarrow K(H_2(N; \mathbb{Z}), 2)$  durch

$j_*: H_2(M; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(N; \mathbb{Z})$  induziert ist.

Sei  $V \subset H^2(K(H_2(M; \mathbb{Z}), 2)) \cong \text{Hom}(H_2(K(H_2(M; \mathbb{Z}), 2); \mathbb{Z})) \cong H_2(M; \mathbb{Z})^* \cong H^2(M; \mathbb{Z})$  der  $i^*(U)$  entsprechende Unterraum.

Weil  $i^*(U) \subset H^2(M; \mathbb{Z})$  direkter Summand ist, gibt es einen Summanden  $V' \subset H^2(K(H_2(M; \mathbb{Z}), 2))$  mit

$$V \oplus V' = H^2(K(H_2(M; \mathbb{Z}), 2)).$$

Da  $i^*: H^2(E; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(M; \mathbb{Z})$  surjektiv ist, können wir nun

$\bar{\nu}_M: M \longrightarrow B_2(M)$  zu einem Lift  $\bar{\nu}_E: E \longrightarrow B_2(M)$  fortsetzen,

so daß für alle  $x \in V$   $\bar{\nu}_E^*(x) \in U$  gilt.

Wir müssen zeigen, daß  $(E, J \circ \bar{\nu}_E) \in \mathcal{R}_{6}^{B_2(N)}$  null ist.

Dann folgt aus Satz 8.12, daß sich der klassifizierende

Diffeomorphismus von  $E$  zu einem Diffeomorphismus

$F: S^1 \times N \longrightarrow S^1 \times N$  mit  $F|_{D^1 \times M} = \text{Id}$  fortsetzen läßt.

Ist nämlich  $f: S^1 \times M \longrightarrow S^1 \times M$  der klassifizierende Diffeomorphismus von  $E$  (d.h.  $E \xrightarrow{\cong} D_+^2 \times M \cup_f D_+^2 \times M = M(f)$ ),  
 $S^1 \times M = D_+^2 \times M \cup_{D_+^2} D_+^2 \times M$ ,  
 so gibt es nach Konstruktion von  $\bar{\nu}_E: E \longrightarrow B_2(M)$  eine

$B_2(M)$ -Struktur  $\bar{\nu}: D_+^2 \times M \longrightarrow B_2(M)$ , so daß

$$\eta(D_+^2 \times M, \bar{\nu}, f) = (M(f), \bar{\nu} \cup \bar{\nu}_E) \cong (E, \bar{\nu}_E),$$

und aus 8.12 folgt unter der Voraussetzung  $J_* (\eta(D_+^2 \times M, \bar{\nu}, f)) = 0$  daß  $\beta_2(D_+^2 \times M, \bar{\nu}, f) = f$  pseudonullbordant ist.

Da  $H_2(N; \mathbb{Z})$  torsionsfrei ist, folgt, daß nach Satz 5.6

$\Omega_6^{B_2(M)}$  torsionsfrei ist, d.h.  $(E, J \circ \bar{\nu}_E)$  ist durch

charakteristische Zahlen bestimmt.

Wegen der Bedingung  $j_*|_U \equiv 0$  gilt  $\text{Bild } j^*: H^2(N; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(M; \mathbb{Z})$   
 $= i^*(U)$ , wie man an folgendem Diagramm sieht:

$$\begin{array}{ccccc} \longrightarrow & H^2(N; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{j^*} & H^2(M; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^3(N, M; \mathbb{Z}) \\ & \text{PD} \downarrow \cong & & \text{PD} \downarrow \cong & & \text{PD} \downarrow \cong \\ \longrightarrow & H_3(N, M; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_2(M; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{j_*} & H_3(N; \mathbb{Z}) \end{array}$$

Daraus folgt für  $\hat{j}: K(H_2(M; \mathbb{Z}), 2) \longrightarrow K(H_2(N; \mathbb{Z}), 2)$

$\text{Bild } \hat{j}^* = V$ .

Sind nun  $x_1, x_2, x_3$  drei beliebige Elemente aus  $H^2(K(H_2(M; \mathbb{Z}), 2))$ ,  
 so gilt  $\langle (J \circ \bar{\nu}_E)^*(x_1 \cup x_2 \cup x_3), [E] \rangle = \langle \bar{\nu}_E^*(\hat{j}^* x_1) \cup (\hat{j}^* x_2) \cup (\hat{j}^* x_3), [E] \rangle$   
 $= \langle \bar{\nu}_E^*(\hat{j}^* x_1) \cup \bar{\nu}_E^*(\hat{j}^* x_2) \cup \bar{\nu}_E^*(\hat{j}^* x_3), [E] \rangle$ .

Da für  $i=1, 2, 3$   $\hat{j}^*(x_i) \in V$ , gilt  $\bar{\nu}_E^*(\hat{j}^* x_i) \in U$  nach Konstruktion  
 von  $\bar{\nu}_E$ , d.h.  $\langle \bar{\nu}_E^*(\hat{j}^* x_1) \cup \bar{\nu}_E^*(\hat{j}^* x_2) \cup \bar{\nu}_E^*(\hat{j}^* x_3), [E] \rangle = 0$  wegen (ii).

Ebenso folgt für beliebiges  $x \in H^2(K(H_2(N; \mathbb{Z}), 2))$

$$\langle (J \circ \bar{\nu}_E)^* x \cup p_1(\bar{\nu}_E), [E] \rangle = \langle \bar{\nu}_E^*(\hat{j}^* x) \cup p_1(E), [E] \rangle = 0 \text{ wegen (iii).}$$

Damit ist gezeigt, daß alle charakteristischen Zahlen von  
 $(E, J \circ \bar{\nu}_E)$  verschwinden.

Also ist  $(E, J \circ \bar{\nu}_E)$  nullbordant.

b)

Wir zeigen nun, daß wir die in a) zusätzlich verwendeten Eigenschaften von  $N$  durch geeignete Wahl von  $N$  immer erreichen können.

Aus Lemma 8.6 und dem Beweis in  $[Kr_2]$  entnimmt man wegen  $\dim N = 5$  und der Tatsache, daß  $N$  eine 1-zusammenhängende Spin-Mannigfaltigkeit ist, unmittelbar folgende Aussage:

- (\*) Ist  $x \in H_2(M; \mathbb{Z})$  mit  $x \circ x = 0$  gegeben, so läßt sich  $j_*(x)$  durch eine Einbettung  $S^2 \times D^3 \subset N$  repräsentieren, so daß für die Mannigfaltigkeit  $N'$ , die wir durch Surgery auf  $S^2 \times D^3 \subset N$  aus  $N$  erhalten, folgendes gilt:
- 1)  $j'_*(x) = 0$
  - 2) Falls für  $z \in H_2(M; \mathbb{Z})$   $x \circ z = 0$  und  $j_*(z) = 0$  gilt, so folgt  $j'_*(z) = 0$ .

Da die Schnittform  $\circ$  auf  $U'$  verschwindet, können wir durch mehrfache Anwendung von (\*) erreichen, daß  $j_*|_{U'} \equiv 0$ .

Wir machen  $H_2(N; \mathbb{Z})$  nun torsionsfrei.

Sei  $x \in H_2(N; \mathbb{Z})$  ein Torsionselement. Wir können  $x$  durch eine Einbettung  $S^2 \times D^3 \subset N$  repräsentieren. Da  $N$  5-dimensional ist, wird durch Surgery auf  $x$  der Rang von  $H_2(N; \mathbb{Z})$  um 1 erhöht,  $x' = [* \times \partial D^3]$  hat unendliche Ordnung in  $H_2(N'; \mathbb{Z})$  (Vgl.  $[Br_2, IV, §3]$ ).

Aus der kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow x' \mathbb{Z} \longrightarrow H_2(N'; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_2(N'; \mathbb{Z}) / x' \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

folgt mit  $H_2(N'; \mathbb{Z}) / x' \mathbb{Z} \cong H_2(N; \mathbb{Z}) / x \mathbb{Z}$  ( $[Br_2, IV, §3]$ )

$$|\text{Tor } H_2(N'; \mathbb{Z})| < |\text{Tor } H_2(N; \mathbb{Z})|.$$

$N'$  ist wie  $N$  1-zusammenhängend.

Ist  $z \in U'$  mit  $j_*(z) = 0$  und  $c$  eine simpliziale Kette mit  $dc = z$ , so läßt sich  $c$  als relative Kette von  $(N; M)$  auf-

fassen; und da  $x$  Torsion ist, gilt  $x \bullet c = 0$ . Deshalb

kann  $S_x^2 \subset N$  so gewählt werden, daß  $c \cap S_x^2 = 0$ . (Vgl. [Kr<sub>2</sub>, Lemma 8.6;1])

Also gilt  $j'_*(z) = 0$ , d.h. die zuerst erreichte Bedingung

$j'_*|_{U'} \equiv 0$  bleibt erhalten.

Nach endlich vielen Surgeries auf Torsionselementen

ist  $H_2(N; \mathbb{Z})$  torsionsfrei.

q.e.d.

## § 9 Bordismus von Faserbündeln

### über einem Wedge von 1-Sphären

Ist  $X$  ein endlicher CW-Komplex, so haben wir in § 8 die Bordismusgruppe  $F_n(X)$  von Faserbündeln über  $X$  eingeführt, wobei die Fasern orientierte, geschlossene  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten sind. In diesem Kapitel soll  $F_n(X)$  für den Fall, daß  $X$  ein Wedge von 1-Sphären ist, berechnet werden.

Die Bordismusgruppen  $F_n(X)$  liefern einen kontravarianten Homotopiefunktor. Es soll gezeigt werden, daß dieser Funktor für gerades  $n$  das Wedge-Axiom nicht erfüllt, d.h. daß dieser Funktor nicht darstellbar ist.

Zum Abschluß des Kapitels folgen Bemerkungen über Bordismus von Faserbündeln über Flächen.

Wir beschäftigen uns hier mit dem Fall, daß  $X = X_r := \bigvee_{i=1}^r S_i^1$  ein Wedge von 1-Sphären ist.

Die Isomorphieklasse eines Faserbündels über  $S^1$  ist durch die Konjugationsklasse der Isotopieklasse eines Diffeomorphismus der Faser gegeben:

Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \text{Menge der Konjugations-} & \longrightarrow & \text{Menge der Isomorphieklassen} \\ \text{klassen von } \pi_0 \text{Diff}(M) & & \text{von Faserbündeln über } S^1 \\ & & \text{mit Faser } M \\ [f] \longmapsto & [M_f \xrightarrow{p} S^1] \end{array}$$

ist eine Bijektion.

Dabei ist  $M_f = [0,1] / (x,0) \sim (f(x),1)$  der Abbildungstorus von  $f$ .  
 $p$  ist durch  $p([t,x]) = [t] \in [0,1] / 0 \sim 1 = S^1$  gegeben.

Daraus erhält man für  $X_r = \bigvee_{i=1}^r S_i^1$  ohne weiteres folgendes Resultat.

Hilfssatz 9.1:

Ein Faserbündel  $E$  über  $X_r$  mit Faser  $M$  ist gegeben durch die Konjugationsklasse von  $r$  Isotopieklassen  $(f_1, \dots, f_r)$  von Diffeomorphismen auf  $M$  (d.h.  $(f_1, \dots, f_r) \sim (f_1, \dots, f_r) \iff$   
Es gibt  $g \in \pi_0 \text{Diff}(M)$ , so daß  $f_i = g \circ f_i \circ g^{-1}$  in  $\pi_0 \text{Diff}(M)$  für  $i=1, \dots, r$ ).

$M \rightarrow E \rightarrow X_r$  ist genau dann nullbordant, wenn es eine orientierte Mannigfaltigkeit  $N$  mit  $\partial N = M$  gibt, sowie  $r$  Diffeomorphismen  $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r: N \rightarrow N$  mit  $\partial(N; \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r) = (M; f_1, \dots, f_r)$ .

Für  $r = 1$  ergibt sich  $F_n(S^1) = \Delta_n$  (Bordismus von Diffeomorphismen). Dieser Fall ist für  $n \geq 3$  in  $[Kr_2]$  gelöst worden. Die dort verwendete Methode läßt sich ohne größere Probleme auch für den Fall  $r > 1$  verwenden. Es soll nur der orientierte Fall behandelt werden. Analog wie in  $[Kr_2]$  lassen sich die Berechnungen für  $(B, f)$ -Mannigfaltigkeiten verallgemeinern.

Wir führen nun die Berechnung von  $F_n(X_r)$  für  $n \geq 3$  durch.

Zunächst sollen die notwendigen Bordismusinvarianten eingeführt werden.

$(M; f_1, \dots, f_r)$  repräsentiere ein Faserbündel über  $X_r$ .

Neben der Bordismusklassse der Faser sind die Bordismusklassen der Abbildungstori  $M_{f_i}$ ,  $i=1, \dots, r$  in  $\Omega_{n+1}$  Bordismusinvarianten.

Ist  $n = 2m$ , so ist durch die Schnittform  $\circ$  von  $M$  eine unimodulare  $(-1)^m$ -symmetrische Bilinearform auf

$H_m(M, \mathbb{Z}) / \text{Torsion}$  gegeben.

Die durch die Diffeomorphismen  $f_i$ ,  $i=1, \dots, r$ , induzierten Abbildungen  $(f_i)_*$  sind Isometrien von  $(H_m(M, \mathbb{Z}) / \text{Torsion}, \circ)$ , d.h. die Diffeomorphismen  $(f_1, \dots, f_r)$  definieren eine Darstellung von  $\underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{r\text{-mal}} = \bigstar_{i=1}^r \mathbb{Z}$ , der freien Gruppe

mit  $r$  Erzeugern, auf  $(H_m(M, \mathbb{Z}) / \text{Torsion}, \circ)$ .

Die Wittgruppe von Darstellungen einer Gruppe  $G$  auf endlich erzeugten freien abelschen Gruppen mit unimodularer  $(-1)^m$ -symmetrischer  $\mathbb{Z}$ -wertiger Bilinearform werde mit  $W_{(-1)^m}(G; \mathbb{Z})$  bezeichnet [Neu].

Das Element  $(H_m(M, \mathbb{Z}) / \text{Torsion}, \circ, (f_1)_*, \dots, (f_r)_*)$  in  $W_{(-1)^m}(\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}; \mathbb{Z})$  soll mit  $I(M; f_1, \dots, f_r)$  bezeichnet werden (isometrische Struktur des Faserbündels).

Sind die Diffeomorphismen  $f_i$ ,  $i=1, \dots, r$  auf  $N$  mit  $\partial N = M$  fortsetzbar, so liefert

Kern  $i_*: H_m(M, \mathbb{Z}) / \text{Torsion} \longrightarrow H_m(N, \mathbb{Z}) / \text{Torsion}$   
einen metabolischen Unterkern von  $(H_m(M, \mathbb{Z}) / \text{Torsion}, \circ)$ ,  
der von  $(f_1)_*, \dots, (f_r)_*$  invariant gelassen wird (Vgl. [Neu]).  
Also ist die isometrische Struktur eine Bordismusinvariante.

Durch die bisher beschriebenen Invarianten ist die Bordismusklasse von  $(M; f_1, \dots, f_r)$  bereits vollständig bestimmt. Es gilt folgender Satz.

Satz 9.2: Sei  $X_r = \bigvee_{i=1}^r S_i^1$  ein Wedge von 1-Sphären.

a) Ist  $n$  ungerade,  $n \geq 3$ , so ist

$$\Theta_n: F_n(X_r) \longrightarrow \Omega_n \oplus \underbrace{\hat{\Omega}_{n+1} \oplus \hat{\Omega}_{n+1} \oplus \dots \oplus \hat{\Omega}_{n+1}}_{r\text{-mal}}$$

$$(M; f_1, \dots, f_r) \mapsto ([M], [M_{f_1}], [M_{f_2}], \dots, [M_{f_r}])$$

ein Isomorphismus.

$\hat{\Omega}_{n+1}$  Kern der Signatur

b) Für  $n \equiv 2 \pmod{4}$ ,  $n > 2$ , ist

$$\Theta_n: F_n(X_r) \longrightarrow \Omega_n \oplus \Omega_{n+1} \oplus \dots \oplus \Omega_{n+1} \oplus W_{(-1)^{n/2}}(\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}; \mathbb{Z})$$

$$(M; f_1, \dots, f_r) \mapsto ([M], [M_{f_1}], \dots, [M_{f_r}], I(M; f_1, \dots, f_r))$$

ein Isomorphismus.

c) Für  $n \equiv 0 \pmod{4}$  gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow F_n(X_r) \xrightarrow{\Theta_n} \Omega_n \oplus \underbrace{\Omega_{n+1} \oplus \dots \oplus \Omega_{n+1}}_{r \text{ mal}} \oplus W_+(\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}; \mathbb{Z})$$

$$\xrightarrow{\lambda} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2^r \longrightarrow 0.$$

Dabei ist  $\Theta_n$  analog wie unter b) und  $\lambda$  durch

$$\lambda(\alpha; \alpha_1, \dots, \alpha_r; (V, s, \rho_i)) = (\text{sign}(\alpha) - \text{sign}(s), (w_2 w_{n-1}(\alpha_i) -$$

$$(\dim \text{Kern}(1 - H_{\frac{n}{2}}(f_i; \mathbb{Q}) - \dim \text{Kern}(1 - H_{\frac{n}{2}}(f_i; \mathbb{Z}_2) \bmod 2)_{i=1}^r)$$

gegeben (Differenz der Signaturen und Differenzen der De-Rham-Invarianten).

### Beweis:

Der gesamte Beweis lehnt sich stark an den in  $[Kr_2]$  geführten Beweis der Aussage für  $r = 1$  an.

A) Zunächst soll in allen Fällen die Aussage über Bild  $\Theta_n$  bewiesen werden.

Seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \Omega_{n+1}$  beliebige Bordismusklassen.

Für  $n+1 \equiv 0 \pmod{4}$  sei die Signatur von  $\alpha_i$  jeweils null.

Da  $\Delta_n \longrightarrow \hat{\Omega}_{n+1}$ ,  $(M, f) \longmapsto [M_f]$  surjektiv ist,

gibt es Mannigfaltigkeiten  $M_1, \dots, M_r$  und Diffeomorphismen

$g_i: M_i \longrightarrow M_i$ , so daß  $[(M_i)_{g_i}] = \alpha_i$  für  $i=1, \dots, r$ .

$f_i = \text{Id}_{M_1} \cup \text{Id}_{M_2} \cup \dots \cup g_i \cup \dots \cup \text{Id}_{M_r}$  ist dann ein

Diffeomorphismus auf  $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_r =: M$ , so daß

$[M_{f_i}] = [(M_i)_{g_i}] = \alpha_i$  in  $\hat{\Omega}_{n+1}$ , da  $(M_j)_{\text{Id}} \cong S^1 \times M_j$  nullbordant ist.

Also ist  $F_n(X_r) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^r \hat{\Omega}_{n+1}$  surjektiv, und damit folgt auch

die Surjektivität von  $F_n(X_r) \longrightarrow \Omega_n \oplus (\bigoplus_{i=1}^r \hat{\Omega}_{n+1})$ .

Damit ist die Surjektivität im Fall a) bereits gezeigt.

Sei nun  $(V, s)$  ein unimodularer Bilinearraum und  $\varphi_1, \dots, \varphi_r$  Isometrien von  $(V, s)$ .

Ist  $s$  schiefssymmetrisch, so gibt es eine orientierte Fläche  $F$  mit  $(V, s) \cong (H_1(F, \mathbb{Z}), \circ)$  und Diffeomorphismen  $g_i: F \rightarrow F$  mit  $(g_i)_* = \varphi_i$ .

Sei  $M = F \times P_{\frac{n-1}{2}}\mathbb{C}$  und  $f_i = g_i \times \text{Id}_{P_{\frac{n-1}{2}}\mathbb{C}}$ .

Dann gilt  $I(M; f_1, \dots, f_r) = I(F; g_1, \dots, g_r) \cdot I(P_{\frac{n-1}{2}}\mathbb{C}; \text{Id}, \dots, \text{Id})$   
 $= [V, s, \varphi_1, \dots, \varphi_r] \quad (\text{Vgl. [Neu]})$

Da  $F \times P_{\frac{n-1}{2}}\mathbb{C}$  nullbordant und  $(F \times P_{\frac{n-1}{2}}\mathbb{C})_{g_i \times \text{Id}} = F_{g_i} \times P_{\frac{n-1}{2}}\mathbb{C}$  nullbordant für  $i=1, \dots, r$ , liegt

$\{0\} \oplus \{0\}^r \oplus W_{-}(\overset{\tau}{\star}\mathbb{Z}; \mathbb{Z})$  für  $n \equiv 2 \pmod{4}$  im Bild von  $\mathcal{O}_n$ .

Da  $F_n(X_r) \rightarrow \mathcal{O}_n \oplus (\mathcal{O}_{n+1})^r$  surjektiv, folgt also auch die Surjektivität von  $\mathcal{O}_n$  für  $n \equiv 2 \pmod{4}$ .

Wir kommen nun zum Fall  $n \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $n \geq 4$ .

Wie für  $r = 1$  folgt, daß  $F_n(X_r) \rightarrow W_{+}(\overset{\tau}{\star}\mathbb{Z}; \mathbb{Z})$ ,

$$(M; f_1, \dots, f_r) \mapsto I(M; f_1, \dots, f_r)$$

surjektiv ist. Ist nämlich  $[V, s, \varphi_1, \dots, \varphi_r] \in W_{+}(\overset{\tau}{\star}\mathbb{Z}; \mathbb{Z})$  gegeben, so können wir nach Addition von hyperbolischen Summanden o.B.d.A. annehmen, daß  $(V, s)$  indefinit und ungerade ist.

Dann gibt es eine 1-zusammenhängende 4-Mannigfaltigkeit  $M$  mit  $(H_2(M; \mathbb{Z}), \circ) \cong (V, s)$ , und jede Isometrie von  $(H_2(M; \mathbb{Z}), \circ)$  läßt sich durch einen Diffeomorphismus realisieren.  $[wa_2]$

Also gibt es Diffeomorphismen  $f_1, \dots, f_r: M \rightarrow M$  mit

$f_{i*} = \varphi_i$  für  $i=1, \dots, r$ , d.h.  $I(M; f_1, \dots, f_r) = [V, s, \varphi_1, \dots, \varphi_r]$ .

Mit  $M' = M \times P_{\frac{n-4}{2}}\mathbb{C}$ ,  $f'_i = f_i \times \text{Id}$  und der Multiplikativität der isometrischen Struktur folgt für allgemeines  $n \equiv 0 \pmod{4}$

$$I(M', f'_1, \dots, f'_r) = [V, s, \varphi_1, \dots, \varphi_r].$$

Per Konstruktion ist  $w_2 w_{n-1}(M'_{f'_i}) = w_2 w_3(M'_{f_i})$  die einzige evtl. nichttriviale Stiefel-Whitney-Zahl von  $M'_{f'_i}$ .

Sei nun  $(\alpha, (\alpha_i)_{i=1}^r, [V, s, \varphi_1, \dots, \varphi_r])$  ein beliebiges Element im Kern von  $\lambda$ . Wegen der Surjektivität von

$F_n(X_r) \rightarrow \mathcal{Q}_n \oplus (\mathcal{Q}_{n+1})^r$  gibt es eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $N$  und Diffeomorphismen  $g_i: N \rightarrow N$ ,  $i=1, \dots, r$ , mit  $[N] = \alpha$  und  $[N_{g_i}] = \alpha_i$ .

$(V', s', \varphi'_1, \dots, \varphi'_r)$  repräsentiere  $[V, s, \varphi_1, \dots, \varphi_r] - I(N; g_{1*}, \dots, g_{r*})$  in  $W_+^{*}(\mathbb{Z}; \mathbb{Z})$ . OBdA. ist  $(V', s')$  indefinit und ungerade.

Wir haben oben gezeigt, daß es eine Mannigfaltigkeit  $M'$  und Diffeomorphismen  $f'_1, \dots, f'_r: M' \rightarrow M'$  mit

$I(M', f'_1, \dots, f'_r) = [V', s', \varphi'_1, \dots, \varphi'_r]$  gibt, so daß

$w_{2^{w_{n-1}}}(M'_{f'_i})$  die einzige nichttriviale Stiefel-Whitney-Zahl von  $M'_{f'_i}$  ist.

Wegen  $(\alpha, (\alpha_i)_{i=1}^r, [V, s, \varphi_1, \dots, \varphi_r]) \in \text{Kern } \lambda$  gilt

$\text{sign}(V', s') = \text{sign}(V, s) - \text{sign}(N) = \text{sign}(V, s) - \text{sign}(\alpha) = 0$ ,

und wegen  $M' = M \times P_{\frac{n-y}{2}}\mathbb{C}$  ist  $M'$  nullbordant. Ebenso folgt

$w_{2^{w_{n-1}}}(M'_{f'_i}) = 0$ , und da  $w_{2^{w_{n-1}}}(M'_{f'_i})$  die einzige nichttriviale Stiefel-Whitney-Klasse von  $M'_{f'_i}$  ist, ist  $M'_{f'_i}$  nullbordant für  $i=1, \dots, r$ .

Also gilt  $\mathcal{Q}_{n+M'}(g_{1+f'_1}, \dots, g_{r+f'_r}) = (\alpha, (\alpha_i)_{i=1}^r, [V, s, \varphi_1, \dots, \varphi_r])$ , d.h.  $\text{Kern } \lambda \subset \text{Bild } \mathcal{Q}_n$ .

Aus der Exaktheit der Sequenz für  $r = 1$  in  $[Kr_2]$  folgt für  $r > 1$  die Beziehung  $\text{Bild } \mathcal{Q}_n \subset \text{Kern } \lambda$  und die Surjektivität von  $\lambda$ .

Damit sind alle Aussagen über das Bild von  $\mathcal{Q}_n$  bewiesen.

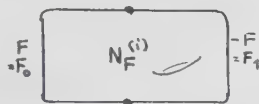
B) Injektivität von  $\omega_n$ :

Sei  $\omega_n(M; f_1, \dots, f_r) = 0$ .

Da  $M$  nullbordant ist, gibt es eine orientierte Mannigfaltigkeit  $F$  mit  $\partial F = M$ . Wir können  $F$  vom  $\left[\frac{n-1}{2}\right]$  - Normalen-Typ BSO wählen.

$F \vee_{f_i} -F$  ist bordant zu  $M_{f_i}$ , also nullbordant nach Voraussetzung. Also gibt es Mannigfaltigkeiten  $N_F^{(i)}$  mit  $\partial N_F^{(i)} = F \vee_{f_i} -F$  für  $i=1, \dots, r$ .

Solch eine Mannigfaltigkeit  $N_F^{(i)}$  heißt zulässige Mannigfaltigkeit für  $(M, f_i)$ .



Zur besseren Unterscheidung wird die Randkomponente  $F$  mit  $F_0$  und die Randkomponente  $-F$  mit  $F_1$  bezeichnet.

1. Fall:  $n=2m-1$

Ist  $n=2m-1$  ungerade und  $m \geq 2$ , so gibt es Zahlen  $s_i \in \mathbb{N}$ , so daß sich  $f_i$  zu einem Diffeomorphismus auf  $F \# s_i(S^m \times S^m)$  fortsetzen läßt.

Das folgt aus dem Beweis der Behauptung für  $r = 1$  in  $[Kr_2]$  ebenso wie aus Theorem 2.1, bzw. Theorem 2.4 in  $[Kr_1]$ .

Ist  $s = \max \{s_1, \dots, s_r\}$ , so lassen sich die Diffeomorphismen  $f_1, \dots, f_r$  zu Diffeomorphismen auf  $N = F \# s(S^m \times S^m)$  fortsetzen, d.h.  $(M; f_1, \dots, f_r)$  ist nullbordant.

2. Fall:  $n=2m$ ,  $m \geq 2$

Dieser Fall ist wesentlich verwickelter als der ungerade-dimensionale Fall.

Unter der Voraussetzung, daß  $M$  und  $M_{f_i}$  nullbordant sind und daß  $I(M; f_i) \in W_{(-1)^m}(\mathbb{Z}; \mathbb{Z})$  verschwindet, läßt sich durch geeignete geometrische Modifikationen  $F$  in  $F(i)$  und  $N_F^{(i)}$  in  $N_{F(i)}^{(i)}$  verwandeln, so daß  $N_{F(i)}^{(i)}$  ein relativer  $h$ -Kobordismus ist. Das ist in  $[Kr_2]$  durchgeführt worden.

Es soll gezeigt werden, daß sich unter der stärkeren Annahme  $I(M; f_1, \dots, f_r) = 0$  in  $W_{(-1)^m}(\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}; \mathbb{Z})$  dieselben Beweisschritte so durchführen lassen, daß man für  $i = 1, \dots, r$  für  $F(i)$  im Wesentlichen die gleiche Mannigfaltigkeit  $F'$  wählen kann.

Ist  $N_{F'}^{(i)}$  ein  $h$ -Kobordismus für  $i=1, \dots, r$ , so läßt sich  $f_1, \dots, f_r$  auf  $F'$  fortsetzen.

Der wesentlichste Teil ist die Verallgemeinerung von Proposition 8.3 in  $[Kr_2]$  für die hier vorliegende Situation.

Hilfssatz 9.3: (Vgl. Prop. 8.3 in  $[Kr_2]$ )

$(M, f_1, \dots, f_r)$  repräsentiere ein Element in  $F_{2m}(X_r)$ .

Seien  $N_F^{(i)}$ ,  $i=1, \dots, r$  zulässige Mannigfaltigkeiten für  $(M, f_i)$  mit folgenden Eigenschaften:

(i) Die Gaußabbildung  $\mathcal{V}_F: F \longrightarrow BSO$  ist eine  $m$ -Äquivalenz.

(ii)  $\mathcal{V}_{N_F^{(i)}}: N_F^{(i)} \longrightarrow BSO$  ist eine  $(m+1)$ -Äquivalenz.

(iii) Ist  $m \neq 1, 3, 7$ , so gibt es ein  $x \in \widetilde{\Pi}_m(F')$  mit

$H(x) = 0$ ,  $\mathcal{V}_*(x) = 0$ , so daß die verstärkte Selbstlinkingzahl  $\mathcal{S}(x) \in \mathbb{Z}_2$  1 ist (Vgl. 6.11 in  $[Kr_2]$ ).

Gilt  $I(M; f_1, \dots, f_r) = 0$  in  $W_{(-1)}^{\star}(M; \mathbb{Z}; \mathbb{Z})$ , so kann man durch Henkeladditionen zulässige Mannigfaltigkeiten  $N_F^{(i)}$ ,  $i=1, \dots, r$  erhalten, die die folgenden Bedingungen zusätzlich erfüllen.

- 1)  $K = \text{Kern } (j_*: H_m(M; \mathbb{Q}) \rightarrow H_m(F', \mathbb{Q}))$  ist für  $i=1, \dots, r$  unter  $(f_i)_*$  invariant ( $j: M = \partial F' \hookrightarrow F'$  Inklusion)
- 2) Ist für  $x \in H_m(M; \mathbb{Z})$   $j_*(x) = 0$  und existiert ein  $i$ , so daß  $j_*(f_i)_*(x)$  Torsion ist, so gilt bereits  $j_*(f_i)_*(x) = 0$ .
- 3) Ist für  $y \in \pi_{m+1}(N_F^{(i)}, F_j)$   $H(d^{(i)}, j(y)) \in H_m(F'_j; \mathbb{Z})$  Torsion und gilt  $y \circ y = 0$ , so gilt bereits  $d^{(i)}, j(y) = 0$ .  
(Dabei ist  $d^{(i)}, j: \pi_{m+1}(N_F^{(i)}, F_j) \rightarrow \pi_m(F'_j)$  die Randabbildung und  $H: \pi_m(F') \rightarrow H_m(F'; \mathbb{Z})$  der Hurewicz-Homomorphismus.)

### Beweis von Hilfssatz 9.3:

Es soll wie im Beweis von 8.3 in [Kr<sub>2</sub>] vorgegangen werden.

Es soll gezeigt werden, daß die gleichen Beweisschritte wie dort durchgeführt werden können, um die gewünschten Bedingungen für alle  $N_F^{(i)}$ ,  $i=1, \dots, r$  gleichzeitig zu erreichen.

Wir modifizieren  $F$  durch Surgery. Bei jedem Surgery-Prozeß auf  $F$  bilden wir für  $i=1, \dots, r$  durch Henkeladdition die entsprechenden zulässigen Mannigfaltigkeiten  $N_F^{(i)}$ .

Da  $I(M; f_1, \dots, f_r)$  in  $W_{(-1)}^{\star}(M; \mathbb{Z}; \mathbb{Z})$  verschwindet, gibt es einen Unterkern  $K \subset H_m(M; \mathbb{Z})/\text{Torsion}$ , der unter  $(f_i)_*$ ,  $i=1, \dots, r$ , invariant ist.

Falls es ein  $i_0 \in \{1, \dots, r\}$  gibt, so daß

$(f_{i_0})_*(K \cap \text{Ker } j_*) \otimes \mathbb{Q} \neq (K \cap \text{Ker } j_*) \otimes \mathbb{Q}$  gilt, läßt sich die Dimension von  $(K \cap \text{Ker } j_*) \otimes \mathbb{Q}$  durch Surgery auf  $F$  vergrößern.

Das ist in [Kr<sub>2</sub>], Seite 67 unter 1) ausgeführt.

Nach einer endlichen Anzahl solcher Surgery-Schritte können wir annehmen, daß für  $i=1, \dots, r$

$(f_i)_*(K \cap \text{Ker } j_*) \otimes \mathbb{Q} = (K \cap \text{Ker } j_*) \otimes \mathbb{Q}$  gilt.

Wie in 8.3 folgt dann für alle  $i$ , daß für  $x \in \text{Ker } j_*$   $(f_i)_*(x)$  in  $K + \text{Kern } j_*$  liegt.

Falls es ein  $i_0$  gibt, so daß für  $x \in \text{Kern } j_*$   $j_* f_{i_0}(x) \neq 0$  ist, läßt sich durch Surgery die Dimension von  $(K \cap \text{Ker } j_*) \otimes \mathbb{Q}$  wieder vergrößern ([Kr<sub>2</sub>] Seite 68).

Nach endlich vielen Schritten folgt, daß  $\text{Ker } j_* \otimes \mathbb{Q}$  ein invarianter Unterkern von  $I(M; f_1, \dots, f_r) \otimes \mathbb{Q}$  ist.

Damit ist Teil 1) der Bedingungen erfüllt.

Gibt es ein  $i_0$ , so daß für  $x \in \text{Ker } j_* \subset H_m(M, \mathbb{Z})$   $j_* f_{i_0}(x)$  Torsion ist, so wird in 8.3, Beweis von Aussage 2, gezeigt, wie Kern  $j_*$  vergrößert wird, indem  $j_*(f_{i_0})_*(x) \in H_m(F)$  durch Surgery getötet wird.

Nach endlich vielen Schritten ist 2) erfüllt, ohne daß die Bedingung 1) zerstört wird.

Sei  $y \in \pi_{m+1}^{(i)}(N_F^{(i)}, F_j)$  mit  $y \circ y = 0$  gegeben, so daß  $H(d^{(i)}j(y))$  in  $H_m(F_j)$  Torsion ist.  $y$  läßt sich durch eine Einbettung  $(D^{m+1}, S^m) \hookrightarrow (N_F^{(i)}, F_j)$  repräsentieren. Durch Surgery auf  $S^m \subset F_j$  läßt sich zunächst die Dimension von Kern  $H \otimes \text{Id}_{\mathbb{Q}}: \pi_m(F) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow H_m(F; \mathbb{Q})$  verkleinern und schließlich die Torsion von  $\pi_m(F)$ , bis 3) erreicht ist [Kr<sub>2</sub>, Seite 71]. Damit ist Hilfssatz 9.3 gezeigt.

Beweis der Injektivität von  $\Theta_n$  für  $n=2m$ ,  $m \geq 2$ :

Seien  $N_F^{(i)}$ ,  $i=1, \dots, r$ , zulässige Mannigfaltigkeiten für  $(M, f_i)$ . Wie in [Kr<sub>2</sub>, 6.11] kann man erreichen, daß die Voraussetzungen von Hilfssatz 9.3 erfüllt sind. Also können wir weiterhin annehmen, daß die  $N_F^{(i)}$  die Eigenschaften 1) - 3) von Hilfssatz 9.3 haben.

Aus dem Beweis der Injektivität von  $\Theta_n$  für  $r = 1$  in [Kr<sub>2</sub>]

folgt jetzt, daß sich  $f_i$  auf  $F \# s_i(S^m \times S^{m+1}) \# V_i$  fortsetzen läßt, wobei  $s_i \in \mathbb{N}$  und  $V_i$  eine zusammenhängende Summe von Sphärenbündeln über  $S^m$  ist.

Ist  $s = \max \{s_1, \dots, s_r\}$ , so ist  $f_i$  auf  $N = F \# s(S^m \times S^{m+1}) \# V_1 \# \dots \# V_r$  für  $i = 1, \dots, r$  fortsetzbar. q.e.d.

Wie die Berechnung für  $X = \bigvee_{i=1}^r S_i^1$  zeigt, ist die Bestimmung von  $F_n(X)$  im allgemeinen ein sehr schwieriges Problem.

Außer den Berechnungen für  $X_r$  ist bekannt, daß für beliebiges  $X$   $F_1(X) = \{0\}$  und für ein 1-zusammenhängendes  $X$   $F_2(X) = \{0\}$  gilt. Dies ist von A. Didierjean gezeigt worden [Di].

Der dort geführte Beweis benutzt wesentlich die Kenntnis des Homotopietyps der Diffeomorphismengruppe für ein- und zweidimensionale Mannigfaltigkeiten. Für  $n \geq 3$  sind keine weitere vollständige Berechnungen bekannt. Es wäre wünschenswert, systematische Ergebnisse über Bordismusgruppen von Faserbündeln zu bekommen. Wir beschäftigen uns hier mit dem Problem, die Bordismusgruppen  $F_n(X)$  als Homotopiegruppen darzustellen.

Die Bordismusgruppen  $F_n(X)$  liefern für jedes  $n$  einen kontravarianten Homotopiefunktor  $F_n(-)$  auf der Kategorie endlicher, punktierter CW-Komplexe [Shih].

Es ist bereits in der Literatur vermerkt worden, daß diese Funktoren nicht zu einer Kohomologietheorie assoziiert sind [Shih]. Zum Beispiel folgt aus der Berechnung von

$F_n(S^1)$ , daß für die reduzierten Gruppen

$$\tilde{F}_n(X) := \text{Kern}(F_n(X) \rightarrow \Omega_n)$$

kein Suspensionsisomorphismus gilt:

$\tilde{F}_n(S^1)$  ist im allgemeinen nicht isomorph zu  
 $\tilde{F}_{n-1}(S^0) = \{0\}$ .

Es soll nun gezeigt werden, daß für gerades  $n$ ,  $n \geq 4$ ,  
 $\tilde{F}_n(-)$  kein darstellbarer Funktor im Sinne des Brown'schen  
Darstellungssatzes ist, d.h. daß es für Bordismus von  
Faserbündeln in diesen Fällen keinen klassifizierenden  
Raum gibt.

Satz 9.4:

Für gerades  $n$ ,  $n \geq 4$  ist  $\tilde{F}_n(-)$  kein darstellbarer Funktor.

Beweis:

Angenommen,  $\tilde{F}_n(-)$  wäre darstellbar. Dann ist die durch  
Einschränkung der Bündel gegebene Abbildung

$\tilde{F}_{2m}(S^1 \vee S^1) \longrightarrow \tilde{F}_{2m}(S^1) \oplus \tilde{F}_{2m}(S^1)$  ein Isomorphismus  
(Wedge-Axiom).

Wir erhalten folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{F}_{2m}(S^1 \vee S^1) & \xrightarrow{\phi} & \tilde{F}_{2m}(S^1) \oplus \tilde{F}_{2m}(S^1) \\
 \downarrow \Omega_{2m} & & \downarrow \Omega_{2m} \oplus \Omega_{2m} \\
 \Omega_{2m+1} \oplus \Omega_{2m+1} + W_{(-,n)}(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\bar{\phi}} & \Omega_{2m+1} \oplus W_{(-,n)}(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \oplus \Omega_{2m+1} \oplus W_{(-,n)}(\mathbb{Z}; \mathbb{Z})
 \end{array}$$

Dabei ist  $\bar{\phi}$  durch  $\bar{\phi}(\alpha_1, \alpha_2, [V, s, \gamma_1, \gamma_2]) = (\alpha_1, [V, s, \gamma_1], \alpha_2, [V, s, \gamma_2])$   
gegeben.

Aus Satz 9.2 folgt, daß  $\phi$  genau dann ein Isomorphismus ist,  
wenn die Abbildung

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\phi} : W_{(-,n)}(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & W_{(-,n)}(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \oplus W_{(-,n)}(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \\
 [V, s, \gamma_1, \gamma_2] & \longmapsto & ([V, s, \gamma_1], [V, s, \gamma_2])
 \end{array}$$

ein Isomorphismus ist.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß  $m$  ungerade ist.

Auf  $\mathbb{Z}^2$  mit der hyperbolischen Form  $s_H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  sind durch

$\varphi_r = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $\varphi'_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix}$  Isometrien definiert.

$(\mathbb{Z}^2, s_H, \varphi_r)$  und  $(\mathbb{Z}^2, s_H, \varphi'_r)$  sind offensichtlich null in  $W_-(\mathbb{Z}; \mathbb{Z})$ , d.h.  $[\mathbb{Z}^2, s_H, \varphi_r, \varphi'_r]$  liegt im Kern von  $\tilde{\phi}_-$ .

Sei  $r \neq 0$ . Angenommen, es gäbe einen Unterkern  $U$  von  $(\mathbb{Z}^2, s_H)$ , der von  $\varphi_r$  und  $\varphi'_r$  invariant gelassen würde. Dann würde

$\varphi_r \circ \varphi'_r$   $U$  ebenfalls invariant lassen. Jedoch gilt

$\varphi_r \circ \varphi'_r = \begin{pmatrix} r^2+1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix}$ , und  $(\mathbb{Z}^2, s_H, \begin{pmatrix} r^2+1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix})$  ist nicht null in  $W_-(\mathbb{Z}; \mathbb{Z})$  (Vgl. [Neu, Lemma 8.3]).

Damit ist gezeigt, daß  $\bar{X}_r = [\mathbb{Z}^2, s_H, \varphi_r, \varphi'_r]$  für  $r \neq 0$  ein nichttriviales Element im Kern von  $\tilde{\phi}_-$  ist, d.h. in diesem Fall ist  $\tilde{\phi}_-$  nicht injektiv.

Das Tensorprodukt  $\bar{X}_r \otimes \bar{X}_r$  liefert ein Element in  $W_+(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}; \mathbb{Z})$  im Kern von  $\tilde{\phi}_+$ . Aus Lemma 8.3 (ii) in [Neu] folgt, daß dieses Element für  $r \neq 0$  nicht trivial ist, so daß die Behauptung auch für  $m \equiv 0 \pmod{2}$  folgt. q.e.d.

Es sollen nun noch einige Bemerkungen über Bordismus von Faserbündeln über Flächen angeschlossen werden.

Sei  $M_r$  im folgenden die orientierte Fläche vom Geschlecht  $r$ .

In Normalform kann das 1-Gerüst von  $M_r$  als Wedge von

$2r$  1-Sphären  $M_r^{(1)} = \bigvee_{i=1}^{2r} S_i^1 = X_{2r}$  gewählt werden.

Die Fundamentalgruppe  $\pi_1(M_r)$  besitzt dann die Präsentation

$$[a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_r \mid \prod_{i=1}^r [a_i, b_i]]$$

und ein Faserbündel  $M \longrightarrow E \longrightarrow M_r$  ist gegeben durch

Diffeomorphismen  $(f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_r)$ , zusammen mit einer

Isotopie  $H$  zwischen  $\prod_{i=1}^r [f_i, g_i]$  und  $\text{Id}_M$ . ( $[a_i, b_i]$ , bzw.  $[f_i, g_i]$

Kommutator von  $a_i$  und  $b_i$ , bzw. von  $f_i$  und  $g_i$ )

$((f_i, g_i)_{i=1}^r, H)$  ist durch die Isomorphieklasse von  $E$  wieder bis auf Konjugation mit Elementen von  $\Pi_0 \text{Diff}(M)$  wohlbestimmt.)

Wegen  $\prod_{i=1}^r [f_i, g_i]_* = \text{Id}$  in  $H_n(M; \mathbb{Z})$  liefern die induzierten Isometrien  $((f_i)_*, (g_i)_*)_{i=1}^r$  eine Darstellung von  $\Pi_1(M_r)$  auf  $(H_n(M, \mathbb{Z}) / \text{Torsion}, \circ)$ , falls  $\dim M = 2n$ .

In diesem Fall erhalten wir als Bordismusinvariante eine isometrische Struktur

$$I: F_{2n}(M_r) \longrightarrow W_{(-1)^n}(\Pi_1(M_r); \mathbb{Z}).$$

### Satz 9.5:

a) Ist  $n$  ungerade, so ist

$$\begin{aligned} \Theta_n': F_n(M_r) &\xrightarrow{r} \Omega_n \oplus (\hat{\Omega}_{n+1})^{2r} \\ [M, (f_i, g_i)_{i=1}^r] &\mapsto ([M], ([M_{f_i}], [M_{g_i}])_{i=1}^r) \end{aligned}$$

surjektiv.

b) Für  $n \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $n \not\equiv 8$ , ist die Sequenz

$$\begin{aligned} F_n(M_r) &\xrightarrow{\Theta_n'} \Omega_n \oplus (\Omega_{n+1})^{2r} \oplus W_+(\Pi_1(M_r); \mathbb{Z}) \\ &\xrightarrow{\lambda'} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2^r \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

exakt.

Dabei ist  $\Theta_n'$  durch  $\Theta_n(M; (f_i, g_i)_{i=1}^r, H) = ([M], ([M_{f_i}], [M_{g_i}])_{i=1}^r, I(M; f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_r))$

und  $\lambda'$  wie in Satz 9.2 durch die Differenz der Signaturen und die Differenzen der de-Rham-Invarianten gegeben.

### Beweis:

Beim Beweis der Surjektivität von  $F_n(X_{2r}) \longrightarrow (\hat{\Omega}_{n+1})^{2r}$  wurde bereits gezeigt, daß man  $(\alpha_i, \beta_i)_{i=1}^r \in (\hat{\Omega}_{n+1})^{2r}$  durch Abbildungstori  $(M_{f_i}, M_{g_i})_{i=1}^r$  repräsentieren kann, so daß die Diffeomorphismen paarweise kommutieren. Insbesondere gilt dann  $\prod_{i=1}^r [f_i, g_i] = \text{Id}$ . Also ist  $F_n(M_r) \longrightarrow (\hat{\Omega}_{n+1})^{2r}$ , und damit auch  $F_n(M_r) \rightarrow \Omega_n \oplus (\hat{\Omega}_{n+1})^{2r}$  surjektiv. Für  $n$  ungerade ist damit die Behauptung bewiesen.

Wir kommen nun zum Fall  $n \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $n \geq 8$ .

Ist  $[V, s, (\varphi_i, \psi_i)_{i=1}^r]$  ein beliebiges Element in  $W_+(\pi_1(M_r); \mathbb{Z})$ , so ist beim Beweis von Satz 9.2 gezeigt worden, daß es eine 1-zusammenhängende 4-Mannigfaltigkeit  $M$  und Diffeomorphismen  $f_i, g_i: M \rightarrow M$ ,  $i=1, \dots, r$  gibt mit  $(H_2(M, \mathbb{Z}), \cup) \cong (V, s)$  und  $(f_i)_* = \varphi_i$  und  $(g_i)_* = \psi_i$ .

Dann gilt  $(\prod_{i=1}^r [f_i, g_i])_* = \prod_{i=1}^r [\varphi_i, \psi_i] = \text{Id}$ , da die Isometrien  $(\varphi_1, \dots, \varphi_r, \psi_1, \dots, \psi_r)$  eine Darstellung von  $\pi_1(M_r)$  auf  $(V, s)$  liefern. Also ist der Diffeomorphismus  $\prod_{i=1}^r [f_i, g_i]$  pseudoisotop zur Identität  $[Kr_3, \text{Theorem 1}]$ .

Für  $k \geq 1$  ist die Abbildung

$$\pi_0 \text{Diff}(M \times P_{2k}\mathbb{C}) \longrightarrow \pi_0 \widetilde{\text{Diff}}(M \times P_{2k}\mathbb{C})$$

ein Isomorphismus  $[Ce]$ .

Also ist der Diffeomorphismus  $\prod_{i=1}^r [f_i, g_i] \times \text{Id}_{P_{2k}\mathbb{C}}: M \times P_{2k}\mathbb{C} \rightarrow M \times P_{2k}\mathbb{C}$  isotop zur Identität. Ist  $H$  solch eine Isotopie, so

erhalten wir mit Hilfe der Multiplikativität der isometrischen

$$\begin{aligned} & \text{Struktur } ([\text{Neu}]) \quad I(M \times P_{2k}\mathbb{C}; (f_i \times \text{Id}_{P_{2k}\mathbb{C}}, g_i \times \text{Id}_{P_{2k}\mathbb{C}})_{i=1}^r, H) \\ &= [V, s, (\varphi_i, \psi_i)_{i=1}^r] \cdot [Z, \langle 1 \rangle, (\text{Id}, \text{Id})_{i=1}^r] = [V, s, (\varphi_i, \psi_i)_{i=1}^r]. \end{aligned}$$

Wie in 9.2 folgt damit die Exaktheit der Sequenz b).

q.e.d.

#### Bemerkung:

Da für 2-dimensionale, bzw. für 6-dimensionale 2-zusammenhängende Mannigfaltigkeiten die Pseudoisotopieklasse eines Diffeomorphismus nicht durch die Operation in der Homologie bestimmt ist, läßt sich eine analoge Aussage wie in Satz 4.5 für  $n \equiv 2 \pmod{4}$  nicht so ohne weiteres herleiten.

Korollar 9.6:

Gilt  $n \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $n \geq 8$ , so ist ein Faserbündel

$M \rightarrow E \rightarrow X_{2r}$  genau dann bis auf Bordismus auf  $M_r$  fortsetzbar,

wenn  $I(M; f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_r)$  im Bild von

$$W_+(\pi_1(M_r); \mathbb{Z}) \longrightarrow W_+(\frac{\mathbb{Z}}{2}; \mathbb{Z})$$

liegt.

Ist  $n$  ungerade,  $n \geq 3$ , so ist jedes Bündel über  $X_{2r}$

bis auf Bordismus auf  $M_r$  fortsetzbar.

Beweis:

Sei zunächst  $n \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $n \geq 8$ .

Wir betrachten folgendes kommutative Diagramm mit

exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow F_n(X_{2r}) & \xrightarrow{\Theta_n} & \mathcal{O}_n \oplus (\mathcal{O}_{n+1})^{2r} \oplus W_+(\frac{\mathbb{Z}}{2}; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{O}_{2r} \rightarrow 0 \\ \uparrow L & & \uparrow \text{Id} \oplus (\text{Id})^{2r} \oplus t^* & & \uparrow \text{Id} \\ F_n(M_r) & \xrightarrow{\Theta_n^i} & \mathcal{O}_n \oplus (\mathcal{O}_{n+1})^{2r} \oplus W_+(\pi_1(M_r); \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\lambda^i} & \mathcal{O}_{2r} \rightarrow 0 \end{array}$$

$L$  ist durch Einschränkung der Faserbündel von  $M_r$  auf  $X_{2r}$

gegeben, und  $t^*: W_+(\pi_1(M_r); \mathbb{Z}) \longrightarrow W_+(\frac{\mathbb{Z}}{2}; \mathbb{Z})$  wird von

$t: \frac{\mathbb{Z}}{2} = \pi_1(X_{2r}) \longrightarrow \pi_1(M_r)$  mittels Inklusion induziert.

Sei  $M \rightarrow E \rightarrow X_{2r}$  ein Bündel, gegeben durch  $(M; f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_r)$ .

Angenommen,  $I(M; f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_r) = t^* \bar{X}$  mit  $\bar{X} \in W_+(\pi_1(M_r); \mathbb{Z})$ .

Dann gilt  $\lambda^i([M], ([M_{f_i}], [M_{g_i}])_{i=1}^r, \bar{X})$

$= \lambda([M], ([M_{f_i}], [M_{g_i}])_{i=1}^r, I(M; f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_r)) = 0$ , da

Bild  $\mathcal{O}_n \subset \text{Kern } \lambda$ . Also gibt es ein Bündel  $M' \rightarrow E' \rightarrow M_r$  mit

$\Theta_n^i(E') = ([M], ([M_{f_i}], [M_{g_i}])_{i=1}^r, \bar{X})$  wegen der Exaktheit der unteren

Sequenz (Satz 9.5). Es folgt  $\mathcal{O}_n L(E') = \mathcal{O}_n(E)$ , und da  $\mathcal{O}_n$

nach Satz 9.2 injektiv ist, folgt  $L([E']) = [E]$ ,

d.h.  $[E] \in \text{Bild } L$ .

Umgekehrt folgt unmittelbar aus dem Diagramm,

daß für Elemente in Bild L  $I(M; f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_r)$   
in Bild  $t^*$  liegt.

Der Beweis für  $n$  ungerade,  $n \geq 3$ , folgt unmittelbar aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F_n(X_{2r}) & \xrightarrow{\Theta_n} & \Omega_n \oplus \hat{\Omega}_{n+1}^{2r} \\ \uparrow L & \nearrow \Theta'_n & \\ F_n(M_r) & & \end{array},$$

da  $\Theta_n$  ein Isomorphismus (Satz 9.2)

und  $\Theta'_n$  surjektiv ist (Satz 9.5).

q.e.d.

Literaturverzeichnis

- [Al,Ka] J.C. Alexander, Characteristic number obstructions  
S.M. Kahn: to fibering oriented and complex  
manifolds over surfaces,  
Top. 19 (1980), 265 - 282
- [A,B,K] P.L. Antonelli, The concordance-homotopy groups  
D. Burghilea, of geometric automorphism groups,  
P. J. Kahn: Springer Lecture Notes 215 (1971)
- [Bau] H.J. Baues: Obstruction theory,  
on homotopy classification of maps,  
Springer Lecture Notes 628 (1977)
- [Bo] J.M. Boardman: Stable homotopy theory, Chap. 5,  
Duality and Thom spectra,  
University of Warwick,  
Coventry, (1966)
- [Bon] F. Bonahon: Cobordisme des difféomorphismes de  
surfaces,  
C.R.Acad.Sci.Paris 290, série A,  
(1980), 765 - 767
- [Br<sub>1</sub>] W. Browder: The Kervaire invariant of framed  
manifolds and its generalisations,  
Ann. of Math. (2) 90 (1969), 157 - 186
- [Br<sub>2</sub>] W. Browder: Surgery on simply-connected manifolds  
Spinger-Verlag (1972)
- [Bro] E.H. Brown: Generalisations of the Kervaire  
invariant,  
Ann. of. Math. (2) 95 (1972), 368 - 383
- [B<sub>1</sub>] D. Burghilea: Automorphisms of manifolds,  
Proceedings of Symposia in Pure  
Mathematics, 32 (1978), 347 - 371

- [B<sub>2</sub>] D. Burghilea: The rational homotopy groups of  $\text{Diff}(M)$  and  $\text{Homeo}(M)$  in the stability range, Algebraic Topology, Aarhus 1978, Springer Lecture Notes 763 (1979), 604 - 626
- [B,L] D. Burghilea, R. Lashof: Geometric transfer and the homotopy type of the automorphism groups of a manifold, Trans. A.M.S. 269 (1982), 1 - 38
- [B,L,R] D. Burghilea, R. Lashof, M. Rothenberg: Groups of automorphisms of manifolds, Springer Lecture Notes 473 (1975)
- [Ce] J. Cerf: The pseudo-isotopy theorem for simply connected differentiable manifolds, Manifolds Amsterdam, Springer Lecture Notes 197 (1970), 76 - 82
- [Di] A. Didierjean: Cobordisme fibré, thèse, Strasbourg (1980)
- [Do] S. Donaldson: An application of gauge theory to four dimensional topology, J. diff. geom. 18 (1983), 279 - 316
- [Ei] D. Eichner: Isotopieklassen von Diffeomorphismen von  $(k-2)$ -zusammenhängenden stabil-parallelisierbaren  $(2k-1)$ -Mannigfaltigkeiten, Diplomarbeit, Mainz (1983)
- [Fe] H. Federer: A study of function spaces by spectral sequences, Trans. A.M.S. 82 (1956), 340 - 361

- [Hi] P. Hilton: Generalized cohomology and  $K$ -theory,  
Cambridge University Press (1971)
- [Hu] D. Husemoller: Fibre bundles,  
Mc.Graw-Hill, New York (1966)
- [Jo,Re] J. Jones, Kervaire's invariant for framed  
E. Rees: manifolds,  
Proceedings of Symposia in Pure  
Mathematics, 32 (1978), 141 - 147
- [Kr<sub>1</sub>] M. Kreck: An extension of results of Browder,  
Novikov and Wall about surgery on  
compact manifolds,  
Mainz (1985)
- [Kr<sub>2</sub>] M. Kreck: Bordism of diffeomorphism and  
related topics,  
Springer Lecture Notes 1069 (1984)
- [Kr<sub>3</sub>] M. Kreck: Isotopy classes of diffeomorphism  
of  $(k-1)$ -connected almost-parallelizable  
 $2k$ -manifolds,  
Algebraic Topology, Aarhus 1978,  
Springer Lecture Notes 763 (1979),  
643 - 663
- [Kr,Tr] M. Kreck, Duality and the classification of  
G. Triantafillou: manifolds up to finite ambiguity,  
Preprint (1985)
- [Le] J.A. Leslie: On a differential structure for the  
group of diffeomorphisms,  
Top. 6 (1967), 263 - 271
- [Ma,Wi] M.E. Mahowald, The stable homotopy of  $K(\mathbb{Z},n)$ ,  
R.F. Williams: Bol.Soc.Mat. Mexicana 12 (1967), 22 - 28

- [Mei] W. Meier: Some topological properties of Kähler manifolds and homogeneous spaces, Math. Z. 183 (1983), 473 - 481
- [Me] P. Melvin: Bordism of diffeomorphisms, Top. 18 (1979), 173 - 175
- [Mil] R.J. Milgram: Unstable homotopy from the stable point of view, Springer Lecture Notes 368 (1974)
- [Mi] J. Milnor: Whitehead torsion, Bull. A.M.S. 72 (1966), 358 - 426
- [Neu] W.D. Neumann: Equivariant Witt rings, Bonner mathematische Schriften, Nr. 100, (1977)
- [Pe] F.P. Peterson: Lectures on cobordism theory, Kinokuniya Book Store, Tokyo (1968)
- [Schm] B. Schmidt: Diffeomorphismen auf hochzusammenhängenden Mannigfaltigkeiten, Diplomarbeit, Mainz (1982)
- [Shih] W. Shih: Fibre cobordisme and the index of a family of elliptic differential operators, Bull. A.M.S. 72 (1966), 984 - 991
- [Spa] E.H. Spanier: Algebraic topology, Mc.Graw-Hill, New York (1976)
- [St] S. Stolz: Untersuchungen hochzusammenhängender Mannigfaltigkeiten und ihrer Ränder, Springer Lecture Notes 1116 (1985)
- [Sw] R.M. Switzer: Algebraic topology - homotopy and homology, Springer-Verlag (1975)

- [wa<sub>1</sub>] C.T.C. Wall: Surgery on compact manifolds,  
Academic Press, London, New York  
(1970)
- [wa<sub>2</sub>] C.T.C. Wall: Diffeomorphisms of 4-manifolds,  
J. London Math. Soc. 39 (1964),  
131 - 140
- [Wh] G.W. Whitehead: Elements of homotopy theory,  
Springer-Verlag (1978)
- [Žu] A.V. Žubr: Classification of simply connected  
six-dimensional spinor manifolds,  
Izv. Akad. Nauk. SSSR. 39 (1975), No. 4,  
793 - 812

## Lebenslauf

Heinz Stralla

Geboren am 18. 9. 1955

in Remscheid

Eltern: Johann Stralla und

Hildegard Stralla, geb. Simanski

Staatsangehörigkeit: deutsch

### Schulischer

Ausbildungsgang: 1962 - 1966 Grundschule in Remscheid

1966 - 1971 Besuch der Alexander-von-Humboldt-  
Realschule in Remscheid

1971 - 1974 Besuch des Aufbauzweigs für  
Realschulabsolventen am

Leibniz-Gymnasium in Remscheid

Juni 1974 Abitur

### Studium:

Wintersemester 1974/75 Beginn des Studiums

in Mathematik und Physik an der

Gesamthochschule in Wuppertal,

zunächst für das Lehramt Sekundarstufe II,

ab Wintersemester 1975/76 im Diplom-

Studiengang Mathematik

Oktober 1976 Vordiplom

August 1979 Diplom

Wintersemester 1979/80 Wechsel an die

Johannes Gutenberg-Universität in Mainz,

Beginn der Arbeit an einer Dissertation

in Topologie

### Berufliche

### Tätigkeit:

Wintersemester 1980/81 bis Wintersemester 1984/85

wissenschaftlicher Mitarbeiter am

Fachbereich Mathematik der

Johannes Gutenberg-Universität in Mainz

11. 3. 1986 mündliche Doktorprüfung





